Cours de Plan d'Expériences

BUT GCGP - Parcours CPIT - 2A

Bastien Marguet

Enseignant en Mathématiques & Physique
Département GCGP – IUT Lyon 1

Année universitaire 2024–2025

Table des matières

1. Chapitre 1 — Fondamentaux des plans d'expériences

1.1. Définition

Un **plan d'expériences** (ou *Design of Experiments*, DOE) est une méthode structurée permettant d'organiser, de réaliser et d'analyser un ensemble d'essais expérimentaux afin d'extraire un maximum d'informations avec un minimum d'essais.

Cette démarche scientifique et statistique vise à :

— Identifier les facteurs influents sur une réponse ;

— Comprendre les interactions entre facteurs ;

— Optimiser un processus ou un produit.

Exemple : Une entreprise souhaite augmenter le rendement d'extraction d'une huile essentielle. Plusieurs facteurs peuvent influer : température, temps d'extraction, quantité de solvant, etc. On utilise un plan d'expériences pour organiser les essais efficacement.

1.2. Objectifs des plans d'expériences

Les objectifs principaux sont :

— **Optimisation** : maximiser ou minimiser une réponse ;

— **Criblage** : identifier les facteurs significatifs ;

— **Modélisation** : établir une équation reliant les facteurs à la réponse ;

— **Robustesse** : assurer la stabilité du procédé malgré les variations.

1.3. Facteurs et réponses

Un **facteur** est une variable contrôlable susceptible d'influencer la réponse. Il peut être qualitatif ou quantitatif.

La **réponse** (ou variable de sortie) est la grandeur mesurée à chaque essai.

Exemple :

Facteur	Signification	Niveau -1	Niveau +1
x1	Température d'extraction (°C)	50	90
x2	Temps d'extraction (min)	40	120
y	Rendement (%)	*mesuré*	

1.4. Types de facteurs

— **Quantitatif** : valeur numérique (température, temps...)

— **Qualitatif** : catégories (type de solvant...)

— **Manipulable** : contrôlé par l'expérimentateur

— **Non-manipulable** : imposé (ex. caractéristiques matière)

1.5. Codage des facteurs : niveaux réduits

Pour simplifier les calculs, on utilise des niveaux codés selon la formule :

$$x_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\Delta X_i}$$

avec :

— X_i : valeur réelle ;
— $\bar{X}_i$: moyenne des niveaux ;
— $\Delta X_i = \dfrac{\text{niveau haut} - \text{niveau bas}}{2}$

Exemple :

Pour une température allant de 50°C à 90°C :

— $\bar{X} = 70$, $\Delta X = 20$
— Si $X = 90$, alors $x = \dfrac{90 - 70}{20} = +1$

1.6. Structure d'un plan d'expériences

Une **matrice expérimentale** est un tableau qui liste, pour chaque essai d'un plan d'expériences, les niveaux codés (ou réels) des différents facteurs testés. Elle décrit l'ensemble des combinaisons de conditions expérimentales à réaliser.

Un plan comprend :

— Une **matrice expérimentale**
— Les **résultats** associés (réponse mesurée).

Exemple :

Essai	x1	x2	x3	y (% rendement)
1	-1	-1	-1	49.6
2	+1	-1	-1	55.0
...	...	...	...	...

1.7. Avantages d'un plan d'expériences

— **Gain de temps** : moins d'essais pour plus d'informations
— **Analyse statistique** : estimation d'effets et d'interactions
— **Reproductibilité** : essais mieux contrôlés et documentés
— **Optimisation** : approche scientifique pour améliorer un système

Exercice 1.1: Amélioration d'un procédé de fermentation

Une entreprise agroalimentaire souhaite améliorer la qualité gustative d'un yaourt fermenté. Deux facteurs sont étudiés :

- x_1 : Température de fermentation (°C), entre 35°C et 45°C
- x_2 : Durée de fermentation (heures), entre 4 h et 10 h

Question 1 — Définitions

- (a) Définir en une phrase ce qu'est un facteur.
- (b) Définir ce qu'est une matrice expérimentale.

Question 2 — Codage des niveaux
Calculer les valeurs moyennes $\bar{X}$ et les écarts ΔX pour les deux facteurs, puis déterminer leurs valeurs codées pour :

- une température de 45°C,
- une durée de 5 heures.

Question 3 — Matrice expérimentale
Compléter la matrice expérimentale codée pour les 4 essais d'un plan factoriel complet à 2 facteurs et 2 niveaux :

Essai	x_1 (Température)	x_2 (Temps)
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Question 4 — Application
Pourquoi est-il préférable d'utiliser un plan d'expériences structuré comme celui-ci plutôt que des essais choisis au hasard ?

2. Chapitre 2 — Plans de criblage : Le plan de Plackett-Burman

2.1. Objectif d'un plan de criblage

Un **plan de criblage** est un plan d'expériences utilisé pour **identifier rapidement les facteurs ayant un effet significatif** sur une réponse parmi un grand nombre de candidats.

Il permet de se concentrer sur les **paramètres réellement influents**, pour les étudier ensuite plus finement.

Exemple : Une entreprise étudie l'extraction d'une huile essentielle. Elle suspecte 6 facteurs d'avoir un impact sur le rendement : température, temps, solvant, pression, etc. Un plan complet à 2 niveaux nécessiterait $2^6 = 64$ essais. Un plan **Plackett-Burman** permet de réduire ce nombre à seulement 8 essais.

2.2. Définition du plan de Plackett-Burman (PB)

Un **plan de Plackett-Burman** est un plan factoriel fractionnaire d'ordre $N = 4n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), utilisé pour estimer uniquement les **effets principaux** d'un grand nombre de facteurs.

Il repose sur des matrices orthogonales où les **interactions** sont supposées négligeables.

2.3. Hypothèses

— Les interactions sont négligées.

— Les effets sont supposés additifs.

— Les essais sont réalisés de manière indépendante.

2.4. Saturation du plan

Un plan est **saturé** lorsque le **nombre de coefficients à estimer** (constante + effets principaux) est **égal au nombre d'essais**.

Exemple :

— Plan PB à 6 facteurs et 8 essais : $1 + 6 = 7$ coefficients $\rightarrow$ plan **quasi-saturé**

— Avec 7 facteurs : $1 + 7 = 8 \rightarrow$ plan **saturé**

2.5. Orthogonalité

Un plan est **orthogonal** lorsque les colonnes de la matrice expérimentale sont **décorrélées** (produit scalaire nul).

Cela garantit que l'effet estimé d'un facteur **n'est pas influencé par les autres**.

2.6. Construction d'un plan PB

— Chaque ligne correspond à un essai.

— Chaque colonne correspond à un facteur (-1 ou $+1$).

— On ajoute une colonne de réponse y.

Exemple : plan PB à 6 facteurs :

Essai	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y (%)
1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	55.0
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1	47.0
3	+1	+1	+1	-1	-1	+1	56.0
4	-1	+1	+1	+1	-1	-1	46.6
5	+1	-1	+1	+1	+1	-1	62.0
6	-1	+1	-1	+1	+1	+1	50.2
7	-1	-1	+1	-1	+1	+1	57.4
8	-1	-1	-1	-1	-1	-1	49.6

2.7. Calcul des effets principaux

L'**effet principal** d'un facteur correspond à la **différence de moyenne des réponses** entre les essais où ce facteur est à +1 et ceux où il est à -1.

Formule :

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot y_j$$

avec x_{ij} : niveau du facteur i dans l'essai j, et y_j : réponse mesurée.

2.8. Contribution relative d'un facteur

La **contribution relative** p_i d'un facteur est la proportion de variance expliquée par ce facteur parmi l'ensemble des effets.

Formule :

$$p_i = \frac{a_i^2}{\sum_{j=1}^{k} a_j^2}$$

Elle permet de construire un **diagramme de Pareto** pour classer les facteurs.

2.9. Recommandations pratiques

- Réaliser des essais répétés (au centre) pour vérifier la validité du modèle.
- Le plan PB est un outil de **criblage**, pas d'optimisation.
- Il doit être suivi d'un plan plus fin (pfc ou composite) si besoin.

Exercice 2.1: Criblage des paramètres d'extraction d'un arôme naturel

Une entreprise de parfumerie souhaite optimiser le rendement d'extraction d'un arôme naturel par hydrodistillation. Elle suspecte 6 facteurs d'influencer ce rendement :

- x_1 : Température (°C), x_2 : Temps (min), x_3 : Ratio solvant/matière,
- x_4 : Taille des particules (mm), x_5 : Pression (bar), x_6 : Teneur en eau (%).

Un plan de Plackett-Burman à 8 essais est mené :

Essai	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y (%)
1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	55.0
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1	47.0
3	+1	+1	+1	-1	-1	+1	56.0
4	-1	+1	+1	+1	-1	-1	46.6
5	+1	-1	+1	+1	+1	-1	62.0
6	-1	+1	-1	+1	+1	+1	50.2
7	-1	-1	+1	-1	+1	+1	57.4
8	-1	-1	-1	-1	-1	-1	49.6

Question 1 — Nature du plan

- (a) Quel type de plan est utilisé ici ?
- (b) Combien de coefficients peut-on estimer avec ce plan ? Est-il saturé ?

Question 2 — Calcul d'un effet principal
Calculer l'effet principal a_1 du facteur température x_1 selon la formule :

$$a_1 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{8} x_{1j} \cdot y_j$$

Question 3 — Classement des effets
Données : $a_1 = +3.3$, $a_2 = -1.1$, $a_3 = +2.5$, $a_4 = +1.7$, $a_5 = -2.4$, $a_6 = +0.5$

- (a) Calculer la contribution relative p_i de chaque facteur.
- (b) Quel est le facteur le plus influent ?
- (c) Quels facteurs pourraient être négligés ?

3. Chapitre 3 — Analyse des résultats expérimentaux

3.1. Effets principaux

Un **effet principal** d'un facteur correspond à l'influence moyenne de ce facteur sur la réponse, mesurée par la différence entre les niveaux $+1$ et -1.

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot y_j$$

où x_{ij} est le niveau codé (± 1) du facteur x_i à l'essai j et y_j la réponse correspondante.

Un effet $a_i > 0$ signifie que l'augmentation du facteur fait augmenter la réponse ; s'il est négatif, la réponse diminue.

Exemple : Pour un facteur x_1 sur 8 essais avec y_j donné, on calcule a_1 en sommant $x_{1j} \cdot y_j$ sur tous les essais puis en divisant par 8.

3.2. Classement des effets

Une fois les effets calculés, on les classe par ordre décroissant de $|a_i|$ pour :

— Identifier les facteurs dominants,

— Éliminer les facteurs négligeables,

— Justifier des choix de réglages ou de nouveaux plans.

Remarque : Dans un plan saturé, les effets ne peuvent pas être statistiquement testés (pas de calcul d'erreur ni d'incertitude).

3.3. Contribution relative

La **contribution relative** d'un facteur est la part de la variance des effets expliquée par ce facteur :

$$p_i = \frac{a_i^2}{\sum_{j=1}^{k} a_j^2}$$

avec k le nombre total de facteurs.

Exemple : Si $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$:

$$\sum a_j^2 = 9 + 1 + 4 = 14, \quad p_1 = \frac{9}{14} \approx 0{,}64$$

Le facteur 1 explique à lui seul 64 % de la variance des effets.

3.4. Diagramme de Pareto

Le **diagramme de Pareto** est un graphique en barres ordonnées par ordre décroissant des effets (ou contributions) montrant les facteurs les plus influents.

Il permet de :

— Visualiser rapidement les facteurs majeurs,

— Appliquer la loi des 20/80 (20% des facteurs expliquent 80% de l'effet),

— Justifier des sélections pour la suite des études.

3.5. Choix du réglage optimal

Dans un plan de criblage, une première proposition de réglage consiste à :

— Choisir $+1$ si l'effet $a_i > 0$ (favorise la réponse),

— Choisir -1 si $a_i < 0$ (diminue la réponse).

Attention : ce réglage est indicatif uniquement car :

— les interactions ne sont pas prises en compte,

— le comportement peut être non linéaire,

— le plan PB n'est pas prévu pour l'optimisation.

3.6. Recommandations à l'industriel

L'analyse permet de formuler :

— Un classement des facteurs les plus influents,

— Un réglage conseillé pour les paramètres dominants,

— Une proposition de plan complémentaire (PFC, plan composite…),

— Une interprétation concrète des résultats pour le procédé étudié.

Exemple : Si x_1 (température) et x_3 (solvant) sont les facteurs dominants, on recommande un plan factoriel sur ces deux paramètres avec essais répétés au centre pour modéliser leur interaction.

Exercice 3.1: Analyse des effets sur le rendement d'une huile essentielle

Une entreprise utilise l'hydrodistillation pour extraire une huile essentielle. Un plan de Plackett-Burman a été réalisé avec 6 facteurs. Les effets principaux estimés sont :

Facteur	Description	a_i
x_1	Température d'extraction (°C)	+2.6
x_2	Temps d'extraction (min)	-1.3
x_3	Ratio solvant/matière première (L/kg)	+2.1
x_4	Taille des particules (mm)	+0.4
x_5	Pression appliquée (bar)	-1.7
x_6	Teneur en eau de la matière première (%)	-0.2

Question 1 — Interprétation

— (a) Identifier les 2 facteurs les plus influents sur le rendement.

— (b) Identifier les 2 facteurs les moins influents. Justifier.

Question 2 — Contributions relatives

— (a) Calculer la contribution relative p_i de chaque facteur :

$$p_i = \frac{a_i^2}{\sum_{j=1}^{6} a_j^2}$$

— (b) Quelle part de la variance est expliquée par les 3 facteurs les plus influents ?

— (c) Proposer un réglage global pour maximiser le rendement.

4. Chapitre 4 — Plans factoriels complets (PFC)

4.1. Définitions

Un **plan factoriel complet** (noté 2^n) est un plan d'expériences dans lequel tous les facteurs sont étudiés à deux niveaux (-1 et $+1$), et où toutes les combinaisons possibles de ces niveaux sont réalisées. Il permet d'évaluer les effets principaux ainsi que toutes les interactions possibles.

Le nombre d'essais est 2^n, où n est le nombre de facteurs étudiés.
Exemple : pour 3 facteurs (x_1, x_2, x_3), le plan contient $2^3 = 8$ essais :

Essai	x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	-1	+1	+1
8	+1	+1	+1

4.2. Pourquoi réduire le nombre de facteurs ?

Après un plan de criblage, on se concentre sur les facteurs significatifs. On utilise alors un plan factoriel complet pour modéliser plus finement leurs effets et interactions, tout en limitant le nombre d'essais.

4.3. Termes d'interactions

Une **interaction** entre facteurs signifie que l'effet d'un facteur dépend du niveau d'un autre facteur. Ces interactions peuvent être à 2, 3, ou plus de facteurs.

Le nombre total de termes dans le modèle est 2^n (constante incluse).
Exemple pour $n = 3$:

— 1 constante : a_0

— 3 effets principaux : x_1, x_2, x_3

— 3 interactions à deux facteurs : x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3

— 1 interaction à trois facteurs : $x_1x_2x_3$

4.4. Origine du nom 2^n

La notation 2^n vient du fait qu'il y a deux niveaux par facteur, et que toutes les combinaisons sont testées. Le plan contient donc 2^n essais.

4.5. Modèle mathématique du 1$^{\text{er}}$ degré avec interactions

Le modèle associé à un plan factoriel à 3 facteurs est :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

4.6. Calcul des coefficients

Le **dépouillement** du plan consiste à calculer les coefficients du modèle à partir des niveaux des facteurs et des réponses mesurées :

$$a_i = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} t_{ij} \cdot y_j$$

où t_{ij} est le produit associé au terme (exemple : x_1x_2 pour a_{12}).

Exemple : pour a_{12}, on multiplie $x_1 \cdot x_2$ pour chaque essai, puis on somme les produits $x_1x_2 \cdot y$ et on divise par 8.

4.7. Comparaison avec un plan PB

Aspect	**Plan PB**	**Plan factoriel complet**
Objectif	Criblage des facteurs influents	Modélisation complète des effets et interactions
Interactions	Non prises en compte	Toutes modélisées
Nombre d'essais	Faible (ex. : 8 pour 6 facteurs)	Croît exponentiellement (2^n)
Saturation	Oui (souvent)	Non (généralement non saturé)
Modèle mathématique	1$^{\text{er}}$ degré sans interaction	1$^{\text{er}}$ degré avec interactions

4.8. Interprétation et visualisation

Une fois les coefficients calculés, on peut :

— Identifier les effets et interactions significatives,

— Comparer les résultats avec ceux obtenus dans un plan PB,

— Tracer des **graphiques d'interaction** pour mettre en évidence les dépendances croisées entre facteurs.

Exercice 4.1: Modélisation d'un procédé de distillation

Une équipe R&D souhaite modéliser le rendement d'un procédé de distillation à partir de 3 facteurs :

— x_1 : Température (°C),

— x_2 : Débit de vapeur (kg/h),

— x_3 : Temps de distillation (min).

Un plan factoriel complet 2^3 est mené. Les rendements expérimentaux sont :

Essai	x_1	x_2	x_3	y (%)
1	-1	-1	-1	65.0
2	+1	-1	-1	69.5
3	-1	+1	-1	64.0
4	+1	+1	-1	67.5
5	-1	-1	+1	70.0
6	+1	-1	+1	75.5
7	-1	+1	+1	68.0
8	+1	+1	+1	74.0

Question 1 — Grille de dépouillement

— Compléter les colonnes suivantes pour chaque essai :

$$x_1x_2, \quad x_1x_3, \quad x_2x_3, \quad x_1x_2x_3$$

Question 2 — Calcul des coefficients

— Calculer les coefficients du modèle complet ($a_i = \frac{1}{8}\sum t_{ij} \cdot y_j$).

— Écrire le modèle avec les termes principaux et les interactions.

Question 3 — Interprétation

— Identifier le facteur principal le plus influent.

— Quelle interaction semble significative ?

— Quelle stratégie recommanderiez-vous pour augmenter le rendement ?

5. Chapitre 5 — Validation des modèles

5.1. Pourquoi valider un modèle expérimental ?

La **validation** d'un modèle expérimental consiste à vérifier que celui-ci représente correctement le comportement du système étudié dans le domaine expérimental.

Les objectifs sont :

- évaluer la **précision** du modèle,
- estimer la **reproductibilité** du procédé,
- détecter d'éventuelles **non-linéarités** ou effets non modélisés.

5.2. Essais au centre du domaine

Un **essai au centre** correspond à une expérience où tous les facteurs sont réglés à leur niveau moyen (niveau codé $x_i = 0$).

Ces essais permettent de :

- estimer la variabilité naturelle du procédé,
- calculer l'écart-type,
- construire un intervalle de confiance.

Exemple : on réalise 4 essais au centre, et on obtient :
$y_1 = 51.0$, $y_2 = 51.4$, $y_3 = 50.8$, $y_4 = 51.6$

5.3. Calcul de l'écart-type

L'**écart-type** permet de quantifier la dispersion des résultats autour de la moyenne :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

Exemple :

$$\bar{y} = \frac{51.0 + 51.4 + 50.8 + 51.6}{4} = 51.2$$

$$s = \sqrt{\frac{(51.0-51.2)^2 + (51.4-51.2)^2 + (50.8-51.2)^2 + (51.6-51.2)^2}{3}} = 0.34$$

5.4. Intervalle de confiance à 95 %

L'**intervalle de confiance à 95 %** autour de la moyenne $\bar{y}$ est donné par :

$$\left[\bar{y} - 2\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{y} + 2\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Exemple :

$$IC = \left[51.2 - \frac{2 \cdot 0.34}{2} \ ; \ 51.2 + \frac{2 \cdot 0.34}{2}\right] = [50.86; 51.54]$$

5.5. Modèle valide ou non ?

Un modèle est **valide** si les valeurs prédites par le modèle sont comprises dans l'intervalle de confiance expérimental obtenu.

Exemple : le modèle prédit $\hat{y} = 51.3$ pour le point centre.
Si l'intervalle est $[50.86; 51.54] \Rightarrow$ le modèle est **valide** à ce point.

Exercice 5.1: Validation d'un modèle d'extraction

Une entreprise souhaite valider un modèle expérimental de prédiction du rendement d'extraction d'une huile essentielle. Pour cela, 4 essais sont réalisés au centre du domaine expérimental :

$$y_1 = 50.9\,\%, \quad y_2 = 51.2\,\%, \quad y_3 = 51.5\,\%, \quad y_4 = 51.1\,\%$$

Le modèle prédit une valeur $\hat{y} = 51.4\,\%$ au point centre.

Question 1 — Moyenne et écart-type

- (a) Calculer la moyenne $\bar{y}$ des réponses expérimentales.
- (b) Calculer l'écart-type expérimental s.

Question 2 — Intervalle de confiance

- Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % autour de la moyenne $\bar{y}$.

Question 3 — Validité du modèle

- (a) Le modèle est-il valide au point centre ?
- (b) Quelle conclusion expérimentale peut-on tirer pour la suite du projet ?

6. Chapitre 6 — Modèles du second degré (non-linéarités)

6.1. Pourquoi modéliser au second degré ?

Un **modèle du second degré** est un modèle mathématique qui inclut des effets quadratiques et permet de représenter des phénomènes non-linéaires et d'identifier un optimum.

Ce type de modèle est utilisé lorsque :

- les effets linéaires sont insuffisants,
- on suspecte des interactions significatives,
- on souhaite localiser un maximum ou un minimum de réponse.

6.2. Forme du modèle du second degré

Pour 3 facteurs (x_1, x_2, x_3), le modèle quadratique s'écrit :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$

Exemple : la température et le ratio solvant/matière ont un optimum pour le rendement d'extraction. Le second degré permet de modéliser la courbure du système et d'identifier ce maximum.

6.3. Le plan composite centré (PCC)

Un **plan composite centré (PCC)** est un plan conçu pour estimer un modèle du second degré. Il combine des points d'un plan 2^n, des points étoilés et des répétitions au centre.

Il comprend :

- les 8 points du cube (2^3),
- 6 points étoilés (ou axiaux),
- plusieurs essais répétés au centre.

Points étoilés pour 3 facteurs :

$$C_1 = (+\alpha, 0, 0), \quad C_2 = (-\alpha, 0, 0), \quad C_3 = (0, +\alpha, 0), \quad \ldots$$

6.4. Le paramètre alpha

Le **paramètre α** est la distance codée entre le centre et les points étoilés. Pour assurer la sphéricité du plan, on utilise généralement $\alpha = \sqrt{n}$. Pour 3 facteurs : $\alpha = \sqrt{3} \approx 1{,}414$.

6.5. Conversion en unités réelles

Pour convertir un point codé en unité réelle :

$$X = \bar{X} + \alpha \cdot \Delta X, \quad \text{avec } \Delta X = \frac{\text{niveau haut} - \text{niveau bas}}{2}$$

Exemple : x_1 (température) entre 50 et 90°C :

$$\bar{X} = 70, \quad \Delta X = 20, \quad X = 70 + 1{,}414 \cdot 20 = 98.28\,^{\circ}\mathrm{C}$$

6.6. Matrice d'un plan composite centré

Un plan PCC contient :

— les 8 essais du cube (2^3),

— les 6 points étoilés ($\pm\alpha$ sur chaque axe),

— des répétitions au centre pour estimer la variabilité expérimentale.

6.7. Saturation du plan PCC

Un plan est **saturé** lorsqu'il contient exactement autant d'essais que de coefficients à estimer.

Pour un modèle du second degré à 3 facteurs, on estime 10 coefficients :

— 1 constante (a_0),

— 3 effets linéaires (a_1, a_2, a_3),

— 3 interactions (a_{12}, a_{13}, a_{23}),

— 1 interaction à 3 facteurs (a_{123}),

— 3 effets quadratiques (a_{11}, a_{22}, a_{33}).

Ainsi, un PCC nécessite au minimum :

$$8 \text{ essais du cube} + 6 \text{ points étoilés} = 14 \text{ essais} + \text{répétitions au centre}$$

Exercice 6.1: Plan composite centré pour optimiser un procédé d'extraction

Une entreprise souhaite optimiser un procédé d'extraction à l'aide d'un modèle du second degré. Trois facteurs sont étudiés :

— x_1 : Température (50 à 90°C),

— x_2 : Temps (40 à 120 min),

— x_3 : Ratio solvant/matière (2 à 10 L/kg).

On utilise un plan composite centré avec $\alpha = 1{,}414$.

Question 1 — Conversion des points étoilés
Donner les coordonnées réelles (en unités physiques) des points étoilés :

$$C_1(+\alpha, 0, 0), \quad C_2(-\alpha, 0, 0), \quad C_3(0, +\alpha, 0), \quad C_4(0, -\alpha, 0), \quad C_5(0, 0, +\alpha), \quad C_6(0, 0, -\alpha)$$

Question 2 — Analyse du modèle
Le modèle estimé est :

$$y = 51.10 + 1.97x_1 - 1.91x_2 + 2.31x_3 - 0.47x_1x_2 + 1.48x_1x_3 \\ - 1.17x_2x_3 + 1.67x_1x_2x_3 + 0.37x_1^2 + 0.57x_2^2 + 0.92x_3^2$$

— (a) Que traduisent les signes des termes quadratiques ?

— (b) Le modèle présente-t-il un maximum ou un minimum de rendement ?

— (c) Quelles interactions sont les plus marquées ?

7. Chapitre 7 — Validation du modèle du second degré

7.1. Pourquoi valider un modèle quadratique ?

La **validation d'un modèle du second degré** consiste à vérifier que le modèle prédit correctement les valeurs expérimentales, notamment dans des points intermédiaires ou non utilisés pour l'ajustement.

Les objectifs sont :

- contrôler la précision des prédictions,
- vérifier la cohérence du comportement quadratique,
- s'assurer que le modèle est exploitable pour l'optimisation.

7.2. Points de contrôle et répétitions

Un **point de validation** est un essai réalisé en dehors des essais du plan initial, souvent avec des coordonnées codées intermédiaires (ex. $x_i = \pm 0{,}5$), répété plusieurs fois pour estimer un intervalle de confiance.

Exemple : on teste les points $C_7 = (-0{,}5, -0{,}5, -0{,}5)$ et $C_8 = (+0{,}5, +0{,}5, +0{,}5)$ avec 4 répétitions chacun.

7.3. Critère de validation

Le modèle est jugé **valide** si la valeur prédite $\hat{y}$ est comprise dans l'intervalle :

$$\left[\bar{y} - 2 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{y} + 2 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

où :

- $\bar{y}$ est la moyenne expérimentale,
- s est l'écart-type,
- n est le nombre de répétitions.

Exemple : pour C_8, on mesure :

$$y_1 = 52.8, \quad y_2 = 52.9, \quad y_3 = 52.7, \quad y_4 = 53.0$$
$$\bar{y} = 52.85, \quad s = 0.13, \quad IC = [52.72\,;\,52.98]$$

Si le modèle prédit $\hat{y} = 52.9$, alors le modèle est **valide** en ce point.

7.4. Recherche d'un optimum

Un **point critique** est un point du domaine expérimental pour lequel la réponse est maximale ou minimale selon le modèle.

Il peut être obtenu par :

- résolution analytique (systèmes d'équations dérivées),
- méthode numérique (logiciel d'optimisation),

— expérimentation ciblée autour du sommet.

Exemple : le modèle prédit un maximum pour :

$$x_1 = 0.6, \quad x_2 = -0.2, \quad x_3 = 0.8$$

On réalise un essai réel à ce point pour confirmer le rendement.

7.5. Stratégie finale d'optimisation

Une fois le modèle validé :

— on identifie un réglage optimal précis,

— on gagne en efficacité expérimentale,

— on peut transmettre des conditions robustes à l'industriel.

Conclusion : la validation expérimentale est une **étape essentielle** avant de tirer des conclusions opérationnelles d'un modèle du second degré.

Exercice 7.1: Validation d'un modèle quadratique et recherche d'optimum

Un modèle du second degré a été ajusté pour modéliser le rendement d'un procédé d'extraction. Au point de contrôle $C_8 = (+0{,}5,\ +0{,}5,\ +0{,}5)$, le modèle prédit un rendement :

$$\hat{y} = 52{,}9\,\%$$

Des mesures expérimentales répétées à ce point ont donné :

$$y_1 = 52{,}8, \quad y_2 = 52{,}9, \quad y_3 = 52{,}7, \quad y_4 = 53{,}0$$

Question 1 — Analyse statistique

— (a) Calculer la moyenne $\bar{y}$ et l'écart-type s.

— (b) Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % autour de $\bar{y}$.

Question 2 — Validation du modèle

— (a) La prédiction $\hat{y}$ est-elle incluse dans l'intervalle ?

— (b) Le modèle est-il valide en ce point ?

Question 3 — Recherche d'optimum
Le modèle prévoit un optimum pour :

$$x_1 = 0{,}6, \quad x_2 = -0{,}2, \quad x_3 = 0{,}8$$

— (a) Pourquoi réaliser un essai réel à ce point ?

— (b) Pourquoi ne peut-on pas se contenter uniquement de la valeur théorique ?

Synthèse finale — Plan d'expériences

Objectif général : Maîtriser les outils et méthodes de planification expérimentale pour :
- identifier les facteurs influents,
- modéliser les effets sur une réponse,
- optimiser un procédé avec rigueur et efficacité.

Vue d'ensemble du parcours

Chap	Contenu clé	Objectif
1	Fondamentaux des plans d'expériences	Structurer une expérimentation efficacement
2	Plans de criblage (Plackett-Burman)	Identifier rapidement les facteurs significatifs
3	Analyse des résultats	Calculer les effets et interpréter leur influence
4	Plans factoriels complets	Étudier les effets et interactions
5	Validation des modèles	Vérifier la robustesse d'un modèle
6	Modèle du second degré (PCC)	Capturer les non-linéarités et rechercher un optimum
7	Validation finale	Tester un optimum théorique par l'expérience

Check-list des compétences acquises

- ✓ Identifier et coder les facteurs (réel ↔ codé)
- ✓ Concevoir un plan PB et interpréter les effets principaux
- ✓ Calculer les contributions relatives et construire un diagramme de Pareto
- ✓ Compléter une grille de dépouillement dans un plan 2^n
- ✓ Écrire un modèle avec interactions et le valider par des essais au centre
- ✓ Concevoir un plan PCC et convertir les points étoilés en unités réelles
- ✓ Calculer un intervalle de confiance et vérifier la validité du modèle
- ✓ Identifier un optimum et le tester expérimentalement

Pour aller plus loin...

- Plans fractionnaires, plans de Taguchi
- Méthodes de surface de réponse (RSM)
- Optimisation multi-objectifs
- Utilisation de logiciels spécialisés (Minitab, JMP, Python/DOEpy...)