Devoir surveillé - Maths Systèmes complexes

Durée : 1 h 30. Calculatrices numériques interdites. Les réponses doivent être **encadrées**.

1. Questions de cours (4 pts)

1. Donnez la **définition mathématique** de $\mathscr{L}[f(t)]$, la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$.

2. Déterminez, par le **calcul intégral**, $\mathscr{L}[\mathcal{U}(t)]$, la transformée de Laplace de la **fonction échelon unité** définie par

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

3. Déterminez, par le **calcul intégral**, $\mathscr{L}[e^{-at}]$ (avec $a > 0$).

4. Expliquez brièvement l'utilité de la **transformée de Laplace** $\mathscr{L}[f(t)]$ dans l'analyse des systèmes dynamiques.

2. Modélisation d'un circuit RC (5 pts)

1. Établissez l'**équation différentielle du premier ordre** régissant la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ dans un circuit RC soumis à une tension d'entrée $e(t) = E_0\mathcal{U}(t)$.

2. En supposant que $u_C(0) = 0$, résolvez l'équation obtenue :
   a. en utilisant la **transformée de Laplace** pour calculer $U_C(p)$.

b. puis en effectuant la **transformée de Laplace inverse** pour obtenir $u_C(t)$. Pour cela, vous devrez effectuer une décomposition en éléments simples.

3. Résolution d'une ED du 2$^{\text{ème}}$ ordre (5 pts)

Considérez l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 4\,y'(t) + 3\,y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

1. Déterminez l'expression de la transformée de Laplace $Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$.

2. En déduire la solution $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(p)]$ par transformée inverse de Laplace de $Y(p)$.

Rappels			
	$\mathscr{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0)$	$\mathscr{L}[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$	$\mathscr{L}[1] = \frac{1}{p}$
	$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1$	$\mathscr{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$	$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right] = e^{-at}$

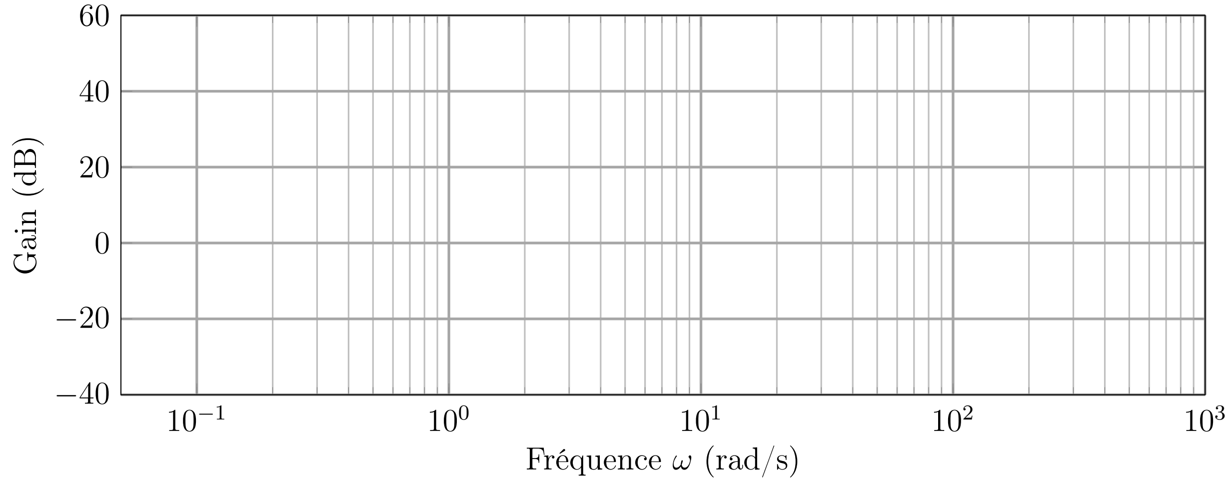
4. Diagrammes de Bode et identification des filtres (6 pts)

On fournit 4 fonctions de transfert. Pour chacune d'elles, répondez aux questions suivantes :

a. Tracez le diagramme de Bode **asymptotique** en gain, puis **superposez la courbe réelle** sur le même graphique.

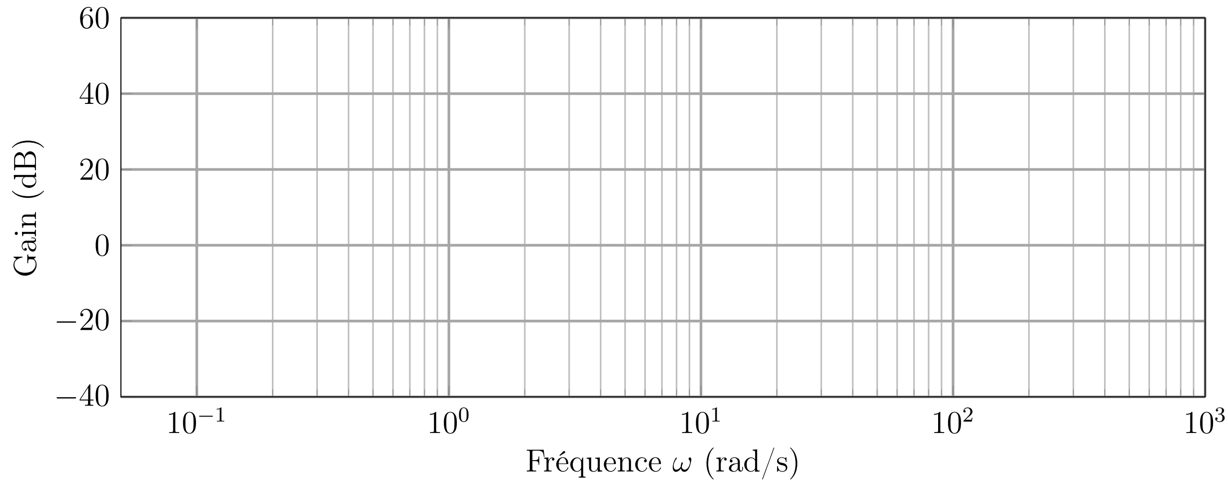
b. Déterminez la **nature du filtre** correspondant (passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande).

$$H_1(p) = \frac{10}{(1 + 0.005p)(0.1 + p)}$$



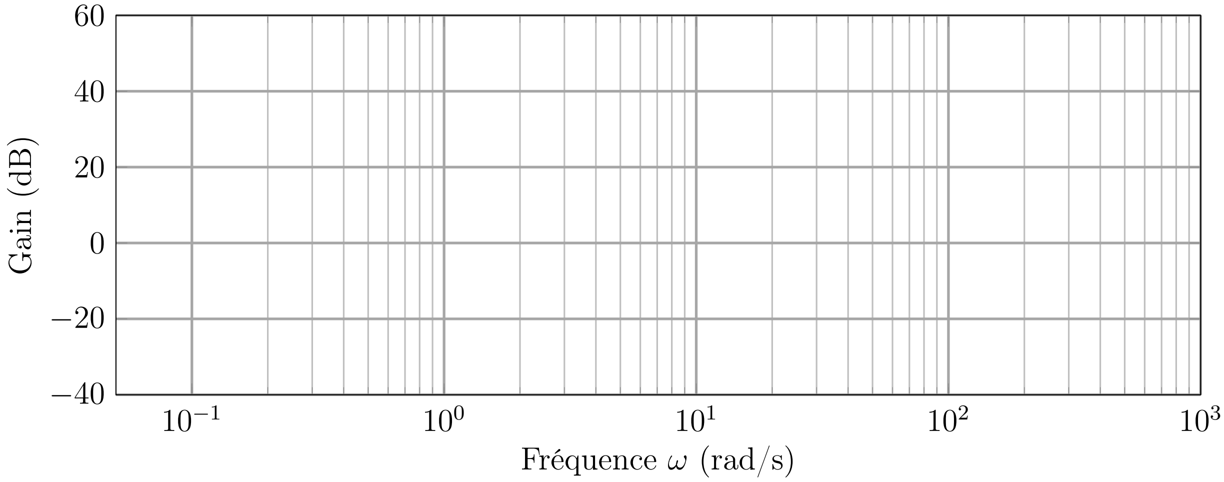
Nature du filtre :

$$H_2(p) = \frac{p^2 + 100}{(p + 100)\,(10p + 1)}$$



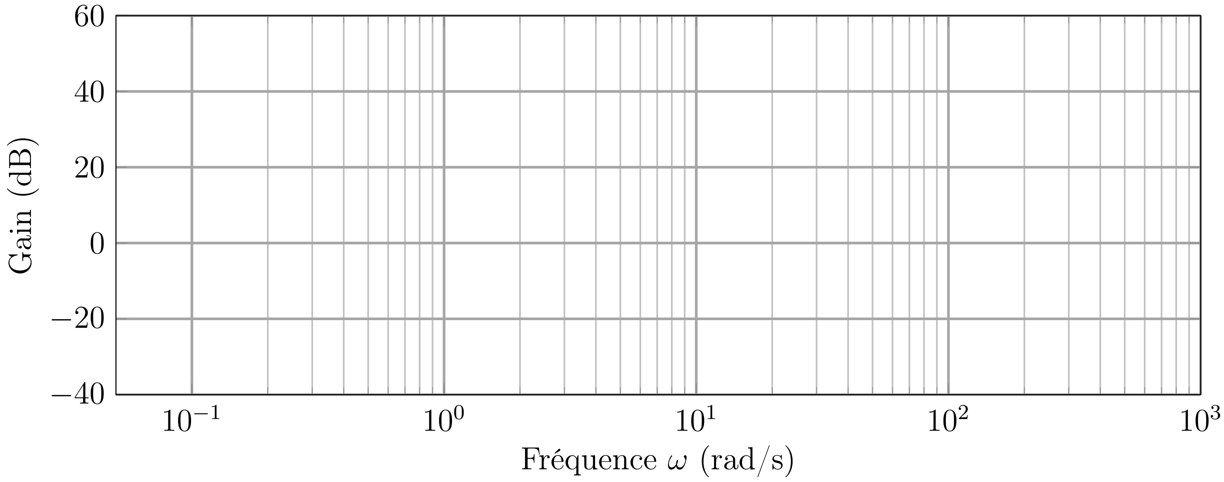
Nature du filtre :

$$H_3(p) = \frac{1 + 200\,p}{(p+20)\,(10p+1)}$$



Nature du filtre :

$$H_4(p) = \frac{250\,p}{(p+25)(1+0.04\,p)}$$



Nature du filtre :