Sujet 3 – Suivi d'une reaction par capteur optique

Contexte

On suit une reaction en solution dans un petit reacteur agite. Un capteur optique mesure un signal $S(t)$ lie a la concentration $C(t)$ d'une espece chimique. Le capteur est etalonne au debut de la manipulation, puis on analyse :
— l'etalonnage (fonction affine),
— une estimation de concentration (polynome degre 2),
— la forme du signal sur une phase de demarrage (polynome degre 3 et point d'inflexion),
— un modele cinetique (ED ordre 1 a coefficient non constant),
— la dynamique propre du capteur (ED ordre 2 sans second membre).
Dans tout le sujet, t est en minutes.

Partie A - Etalonnage du capteur

Avant de lancer la reaction, on realise un etalonnage rapide : on impose deux solutions de reference de concentrations connues et on mesure le signal optique.

Concentration C (mol·L^{-1})	Signal S (adimensionnel)
0.10	3.0
0.40	9.0

On suppose que la relation est affine : $S = aC + b$.
Questions :

1. Tracer la fonction $S(C)$.
2. Determiner a et b (pas de fractions).

Zone de reponses - Partie A

Partie B - Estimation ponctuelle de concentration

Autour d'une valeur de fonctionnement, le capteur presente une faible non-linearite. Pour une plage reduite, on modelise le signal par :

$$S = 20C - 6C^2.$$

À un instant donne, on mesure $S = 6$.

Questions :

1. Ecrire l'equation quadratique a resoudre pour retrouver C.
2. En utilisant le contexte (concentration physiquement plausible), choisir la solution retenue et justifier.
3. Dessiner, à main levée, la fonction $f(C) = 20C - 6C^2$ pour $C \in [0, 4]$ en incluant l'abscisse de l'extremum, les intersections avec l'axe des abscisses.

Zone de reponses - Partie B

Partie C - Signal au demarrage

Au tout debut de la reaction (phase de mise en regime), on observe que le signal peut etre approxime sur l'intervalle $[0, 6]$ par :

$$S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2.$$

Questions :

1. Calculer $S'(t)$ puis $S''(t)$.
2. Determiner l'instant ou la pente $S'(t)$ est maximale ou minimale sur $[0, 6]$ et préciser si elle est min ou max.
3. Y a-t-il un point d'inflexion ? Si oui, calculer ses coordonnées (x, y).

Zone de reponses - Partie C

Partie D - Modele cinetique : ED ordre 1 a coefficient non constant

On suppose que la concentration $C(t)$ d'un reactif suit une loi de type :

$$\frac{dC}{dt}(t) = -k(t)\,C(t), \qquad k(t) = t, \qquad C(0) = C_0.$$

Questions :

1. Resoudre l'equation differentielle et exprimer $C(t)$ en fonction de C_0.
2. Tracer, à main levée, $C(t)$ en indiquant les points caractéristiques (condition initiale, dérivée à l'origine, limite en $t \to +\infty$).
3. Donner le temps $t^\star$ tel que $C(t^\star) = \dfrac{C_0}{e}$.

Zone de reponses - Partie D

Partie E - Dynamique propre du capteur

Apres un micro-choc (vibration sur la table), le capteur se met a osciller autour de sa position d'equilibre. Le deplacement mecanique interne $x(t)$ (en mm) verifie :

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0.$$

On rappelle que : si $\Delta > 0$, $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, si $\Delta = 0$, $x(t) = (A + Bt)e^{r_0 t}$, si $\Delta < 0$, $x(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t)) + B\sin(\beta t))$. **Questions :**

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Tracer, à main levée, $x(t)$ en indiquant les points caractéristiques.

Zone de reponses - Partie E

Partie F - Choix du temps de mesure : optimisation

Lorsqu'on mesure le signal optique, on moyenne sur une duree $t > 0$ (en minutes). Deux effets influencent l'erreur totale $E(t)$:

— le bruit aleatoire diminue quand on moyenne plus longtemps, modele par $\dfrac{2}{\sqrt{t}}$,

— la derive du capteur augmente avec le temps (chauffe, photoblanchiment), modele par $\dfrac{t}{8}$.

On modélise l'erreur totale par :

$$E(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{t}{8}, \qquad t > 0.$$

Questions :

1. Etudier le domaine de definition et calculer $\lim\limits_{t\to 0^+} E(t)$ puis $\lim\limits_{t\to +\infty} E(t)$.
2. Dresser le tableau de variations de $E(t)$.
3. Donner le temps optimal t_{opt} qui minimise l'erreur, puis la valeur minimale $E(t_{\text{opt}})$.

Zone de reponses - Partie F

Partie G - Fenetre d'acquisition : charge collectee et temps optimal

Le capteur optique est une photodiode dont le courant est integre pendant une duree $t \geq 0$ (en minutes). La grandeur exploitee par l'acquisition est la **charge utile** collectee $Q(t)$:

$$\frac{dQ}{dt}(t) = i_p(t) - i_0.$$

Au demarrage de la mesure, le courant photo-induit est transitoire (mise en regime du melange) et on le modele par :

$$i_p(t) = \frac{6}{\sqrt{t+1}} \quad (\mu\text{A}), \qquad i_0 = 2 \quad (\mu\text{A}),$$

ou i_0 represente le courant parasite constant (courant d'obscurite + offset electronique).

Questions :

1. Calculer explicitement $Q(t)$ sachant que $Q(0) = 0$.
2. Determiner le temps optimal t_{opt} maximisant la charge utile, puis calculer $Q(t_{\text{opt}})$.

Zone de reponses - Partie G