DS Mathématiques - Examen final

Durée : 1h50

Instructions : Note totale N_t sur 60 points. Note finale : $N_f = \dfrac{N_t}{3}$.
1. Pour les **exercices 1, 2, 3, 4, 7 et 8**, vous répondrez dans **les encadrés prévus à cet effet** sur le document réponse (**pages 3 et 4**).
2. Le **raisonnement**, qui peut éventuellement rapporter des points, apparaîtra sur feuille libre, avec les exercices 5 et 6.
3. **Encadrez** vos résultats.
4. **Calculatrices interdites**.

Bon courage !

Exercice 1 : Tracez les courbes caractéristiques des fonctions suivantes à main levée **(5 points)** :

1. $f_1(x) = 3\sin(2x) + 1$
2. $f_2(x) = -(x-1)(x+3)(x+2)(x-3)$

Exercice 2 : Calculez les limites suivantes **(4.5 points)** :

1. $A = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{5x^3-x^2-x}{x^4+7x}$
2. $B = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{3x}$
3. $C = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+2x^3}}{x}$

Exercice 3 : Calculez les intégrales suivantes **(7 points)** :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 6\cos(x)\ e^{2\sin(x)}\ \mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{1} e^{2x}\ \left(1+e^{2x}\right)^4\ \mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{\pi/4} x^2\cos(2y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

Exercice 4 : Résolvez les 2 systèmes d'équations suivants **(7 points)** :

$$S_1 \begin{cases} -3x+2y-z &= -6 \\ x-y+z &= 1 \\ 2x+2y+3z &= -4 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} 4\sqrt{x^2+1}-3\sqrt{y^2-1} &= 13 \\ -2\sqrt{x^2+1}+5\sqrt{y^2-1} &= -3 \end{cases}$$

Exercice 5 : Analyse de fonction **(8.5 points)**.
Combien y a-t-il de solutions à l'équation $f(x) = 0$? Justifiez proprement.

$$f(x) = \frac{x}{4} - \ln(7+x^2)$$

Exercice 6 : Décomposition en éléments simples et primitive **(9 points)**.

Calculez $F(X) = \displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x$, une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{x^4-16x^2-7x+14}{x^2-x-12}$

Exercice 7 : Déterminez la nature des points critiques **(10 points)**.

1. Déterminez, par le calcul, les coordonnées $M_i\ (x_i, y_i)$ des points critiques M_i des 3 fonctions suivantes.
2. Déterminez ensuite la nature des points critiques (les critères sont rappelés en fin d'énoncé).

$$f_1(x,y) = x^3 - y^2 + 2xy - x$$
$$f_2(x,y) = e^{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

3. Comment interprétez-vous l'affirmation "Si $H_0 > 0$ et si $r > 0$, alors $M_i(x_i, y_i)$ est un **minimum local**." ?

Exercice 8 : Polynôme de degré 3 et dérivée **(9 points)**.
On considère la fonction f, polynôme de degré 3 dont la courbe est représentée sur la Figure 2.

1. Déterminez l'expression de $f(x)$ sachant que 4 contraintes sont indiquées graphiquement par des croix rouges.
2. Quelles sont les coordonnées des 2 extrema locaux de f ?
3. Tracez, à main levée, sur le même graphique l'allure de $f'(x)$.
4. Y a-t-il un point d'inflexion sur la courbe de $f(x)$? Si oui, déterminez ses coordonnées.
5. Tracez, à main levée, sur le même graphique l'allure de $f''(x)$.

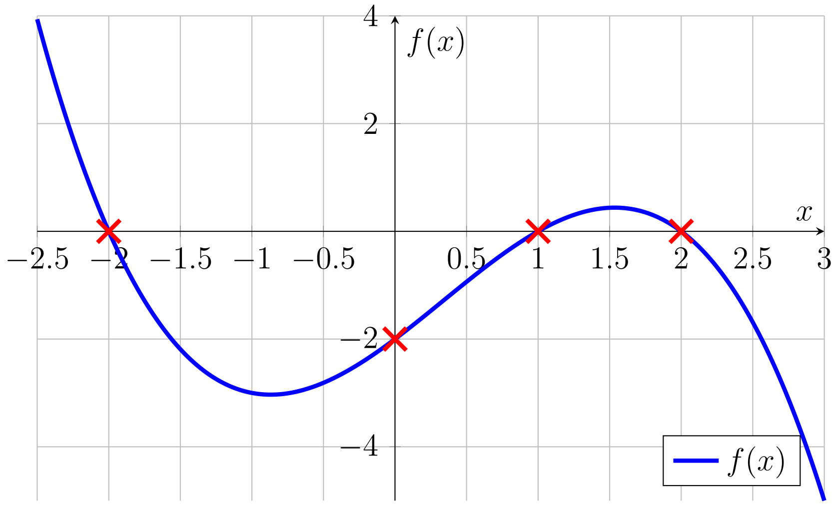

FIGURE 1 – Représentation graphique de $f(x)$

Rappel :

Nature des points critiques : Soit un point critique $M_i\ (x_i, y_i)$ d'une fonction $f_i(x,y)$. On considère la grandeur $H_0 = rt - s^2$ avec $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, y_i)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_i)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_i, y_i)$.
Le test se résume alors à :

1. Si $H_0 > 0$:
   - Si $r > 0$, alors (x_i, y_i) est un **minimum local**.
   - Si $r < 0$, alors (x_i, y_i) est un **maximum local**.
2. Si $H_0 < 0$, alors (x_i, y_i) est un **point col**.
3. Si $H_0 = 0$, le test est **inconclusif** et d'autres analyses sont nécessaires.

Document réponse (2 pages)

Ex 1 : Tracé à main levée

1	**2**

Ex 2 : Valeurs des 3 limites

$A =$	$B =$	$C =$

Ex 3 : Calcul des intégrales (écrire la (les) primitive(s) & le résultat final)

$I_1 =$
$I_2 =$
$I_3 =$

Ex 4 : Solutions des systèmes d'équations

1	**2**

Ex 7 : Coordonnées des points critiques de $f_1(x)$ et $f_2(x)$:

1	**2**

Valeur de r, s, t et H_0 pour chacun des points critiques :

1	**2**

Nature de chacun des points critiques :

1	**2**

Ex 8 : Polynôme de degré 3 et dérivée

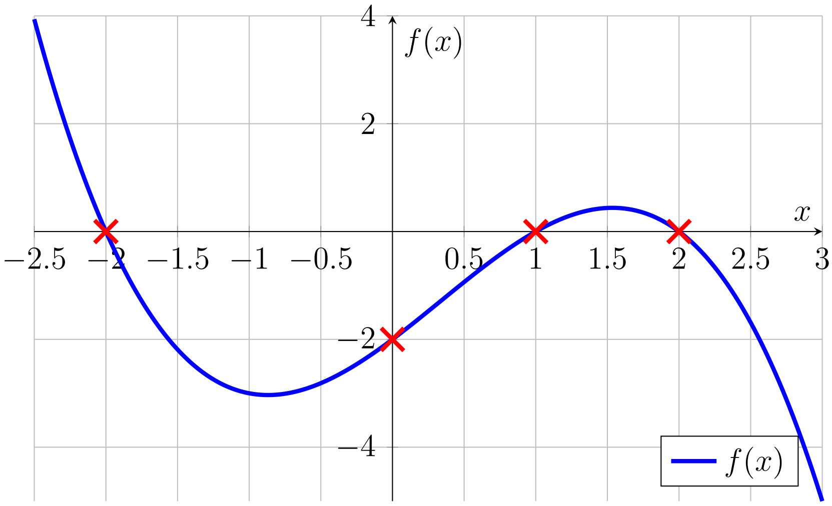

Figure 2 – Tracer $f'(x)$ et $f''(x)$ sur ce document

1. Expression de $f(x)$:

2. Coordonnées (x, y) des extrema de $f(x)$:

4. Coordonnées (x, y) du point d'inflexion :