

## Corrigé examen blanc

### Exercice 1 — Variations de la production

On rappelle  $P(t) = P_0(1 - e^{-kt})$  avec  $P_0 > 0$  et  $k = \ln 2 \text{ h}^{-1}$ .

1. **Allure de  $P(t)$ .** Fonction croissante, concave (convexité négative), part de  $P(0) = 0$  et tend vers  $P_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

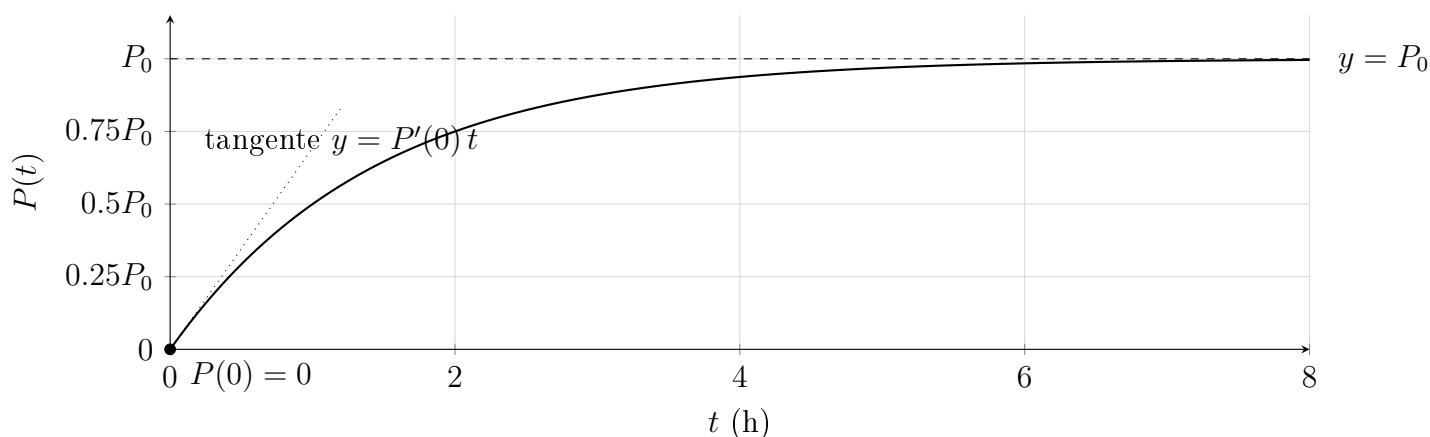


FIGURE 1 – Allure de  $P(t) = P_0(1 - e^{-kt})$  : croissante, concave, asymptote  $y = P_0$ .

2. **Dérivée.**

$$P'(t) = P_0 \cdot (0 - (-k)e^{-kt}) = P_0 k e^{-kt}.$$

3. (a) **Allure de  $P'(t)$ .** Positive, décroissante, de valeur initiale  $P'(0) = P_0 k$  et tendant vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

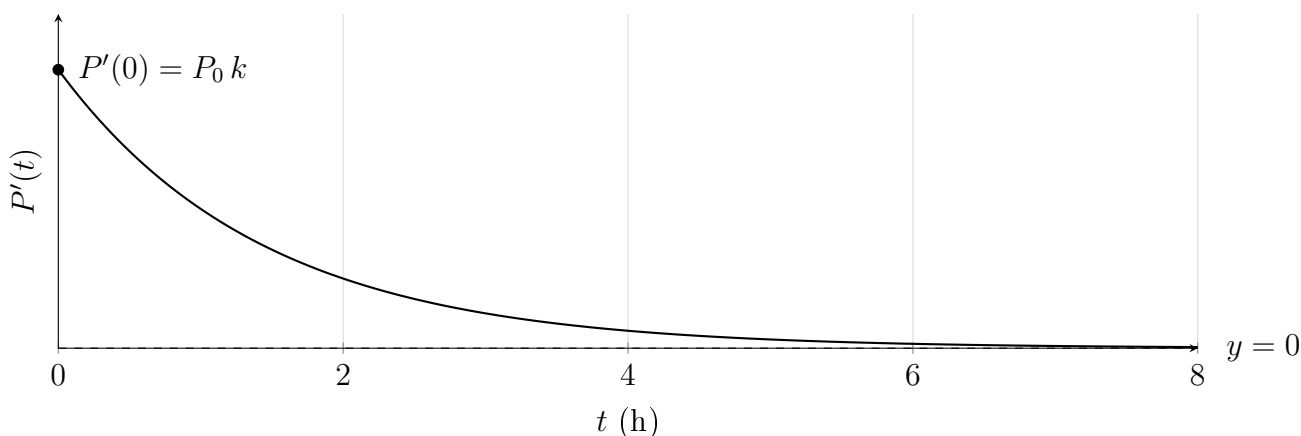


FIGURE 2 – Allure de  $P'(t) = P_0 k e^{-kt}$  : positive et strictement décroissante, limite 0.

- (b) **Signe de  $P'(t)$ .**  $P'(t) = P_0 k e^{-kt} > 0 \Rightarrow P$  croît (l'irradiance augmente le matin).  
 (c) **Évolution de  $P'(t)$ .**  $P'(t)$  décroît car  $e^{-kt}$  décroît : l'accroissement de la puissance se tasse à l'approche du zénith (effet de saturation).

**Exercice 2 — Calcul d'énergie**

Avec  $T_z = 6$  h,

$$E_{\text{matin}} = \int_0^{T_z} P(t) dt = \int_0^{T_z} P_0(1 - e^{-kt}) dt = P_0 \left[ t + \frac{e^{-kt}}{k} \right]_0^{T_z} \Leftrightarrow E_{\text{matin}} = P_0 \left( T_z - \frac{1 - e^{-kT_z}}{k} \right).$$

**Justification de l'intégrale :** l'énergie totale est obtenue en additionnant toutes les contributions infinitésimales d'énergie  $dE$  de la forme  $dE = P(t) dt$  sur la durée considérée. Cette somme continue s'exprime rigoureusement par une intégrale :

$$E(T) = \int_0^T P(t) dt.$$

**Exercice 3 — Approximation du début de matinée (petits  $t$ )**

Développons  $e^{-kt}$  en 0 :

$$e^{-kt} = 1 - kt + \frac{(kt)^2}{2} + o((kt)^2).$$

Donc

$$P(t) = P_0 \left( 1 - \left[ 1 - kt + \frac{(kt)^2}{2} - \dots \right] \right) = P_0 \left( kt - \frac{(kt)^2}{2} + o((kt)^2) \right).$$

1. **DL à l'ordre 2 en 0.**

$$P(t) = P_0 \left( kt - \frac{(kt)^2}{2} \right) + o((kt)^2).$$

**Approx. linéaire (DL1) :**  $P_{\text{DL1}}(t) = P_0 k t.$

**Approx. quadratique (DL2) :**  $P_{\text{DL2}}(t) = P_0 \left( kt - \frac{(kt)^2}{2} \right).$

2. **Comparaison à  $t = 0,5$  h,  $k = \ln 2$ .**

$$kt = \frac{\ln 2}{2} = \ln \sqrt{2} \approx 0,3466, \quad e^{-kt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071.$$

$$\text{Exact : } P(0,5) = P_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0,2929 P_0.$$

$$\text{DL1 : } P_{\text{DL1}}(0,5) = P_0 \cdot 0,3466 \approx 0,3466 P_0 \quad (\text{surestime} \approx +18,3\%).$$

$$\text{DL2 : } P_{\text{DL2}}(0,5) = P_0 \left( 0,3466 - \frac{0,3466^2}{2} \right) \approx P_0(0,3466 - 0,0601) \approx 0,2865 P_0 \quad (\text{sous-estime} \approx -2,2\%)$$

Conclusion : DL2 est nettement plus fidèle que DL1 pour  $kt \approx 0,35$ .

3. **Énergie approchée  $E_{\text{DL2}}(T)$ .**

$$E_{\text{DL2}}(T) = \int_0^T P_0 \left( kt - \frac{(kt)^2}{2} \right) dt \Leftrightarrow E_{\text{DL2}}(T) = P_0 \left( \frac{k}{2} T^2 - \frac{k^2}{6} T^3 \right).$$

**Pour aller plus loin :** *Ordre d'erreur* (terme suivant du DL) : en intégrant  $\frac{P_0}{6}(kt)^3$ , on obtient un écart principal

$$\Delta E \approx \frac{P_0 k^3}{24} T^4 \quad (\text{positif, donc DL2 sous-estime } E \text{ pour petits } kT).$$

## Exercice 4 — Mélange de flux

On modélise

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}}_{=M} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

1. **Interprétation des colonnes.** La colonne 1 (ou 2) de  $M$  indique comment la source solaire 1 (ou 2) redistribue son flux vers  $A$  et  $B$ .

$$\text{Colonne 1} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix} : P_1 \mapsto (0.7 P_1 \text{ vers } A, 0.2 P_1 \text{ vers } B).$$

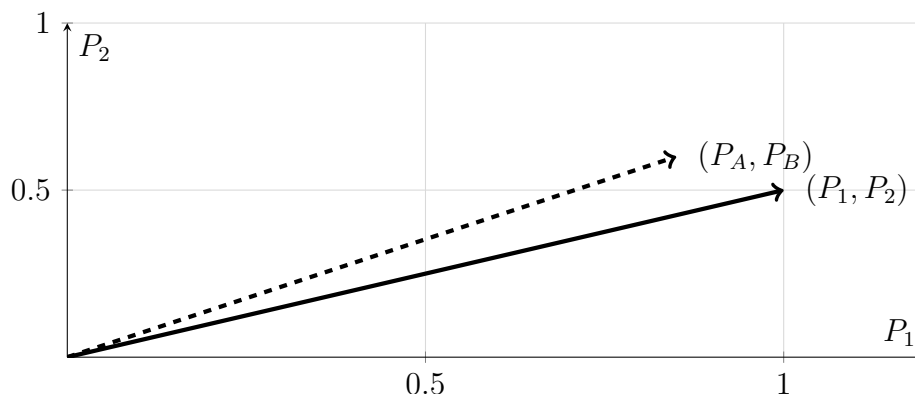
$$\text{Colonne 2} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \end{bmatrix} : P_2 \mapsto (0.3 P_2 \text{ vers } A, 0.8 P_2 \text{ vers } B).$$

2. **Calculs numériques** ( $P_1 = 1 \text{ kW}$ ,  $P_2 = 0.5 \text{ kW}$ ).

$$P_A = 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.85 \text{ kW},$$

$$P_B = 0.2 \cdot 1 + 0.8 \cdot 0.5 = 0.60 \text{ kW}.$$

3. **Représentation des vecteurs.**



4. **Déterminant.**

$$\det(M) = 0.7 \cdot 0.8 - 0.3 \cdot 0.2 = 0.56 - 0.06 = \boxed{0.50}.$$

5. **Interprétation géométrique.** Dans le plan  $(P_1, P_2)$ , la transformation linéaire  $x \mapsto Mx$  multiplie les **aires** par  $|\det(M)| = 0.5$  (et conserve l'orientation puisque  $\det M > 0$ ). Le carré unitaire verrait son aire multipliée par 0.5.
6. **Si  $\det(M) = 0$ .** La transformation *écrase* le plan sur une droite : non-inversibilité, perte d'information (des  $(P_1, P_2)$  différents donnent les mêmes  $(P_A, P_B)$ ). Physiquement : mélange non identifiable/redondant.

## Exercice 5 — Flux total sur un champ

On donne

$$I(x, y) = I_0 \cos\left(\frac{\pi x}{40}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{20}\right), \quad I_0 = 1000 \text{ W/m}^2,$$

sur le rectangle  $0 \leq x \leq 20$ ,  $0 \leq y \leq 10$ .

1. **Intégrale double.**

$$P_{\text{tot}} = \int_{x=0}^{20} \int_{y=0}^{10} I(x, y) dx dy = \int_{x=0}^{20} \int_{y=0}^{10} I_0 \cos\left(\frac{\pi x}{40}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{20}\right) dy dx.$$

2. **Valeur exacte.** L'intégrande est séparable, donc

$$P_{\text{tot}} = I_0 \left( \int_0^{20} \cos\left(\frac{\pi x}{40}\right) dx \right) \left( \int_0^{10} \cos\left(\frac{\pi y}{20}\right) dy \right).$$

Or, pour  $a > 0$ ,  $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$ .

$$\int_0^{20} \cos\left(\frac{\pi x}{40}\right) dx = \frac{40}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{40}\right) \right]_0^{20} = \frac{40}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{40}{\pi}.$$

$$\int_0^{10} \cos\left(\frac{\pi y}{20}\right) dy = \frac{20}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi y}{20}\right) \right]_0^{10} = \frac{20}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{20}{\pi}.$$

Ainsi,

$$P_{\text{tot}} = I_0 \cdot \frac{40}{\pi} \cdot \frac{20}{\pi} = I_0 \frac{800}{\pi^2} = 1000 \cdot \frac{800}{\pi^2} \text{ W} \approx 8.10 \times 10^4 \text{ W (81.0 kW)}.$$

## Exercice 6 — Rendement de la centrale

On considère

$$R(T, S) = -(T - 320)^2 - (S - 800)^2 + 1000.$$

(1) **Gradient et interprétation.**

$$\frac{\partial R}{\partial T} = -2(T - 320), \quad \frac{\partial R}{\partial S} = -2(S - 800).$$

Ainsi,

$$\vec{\nabla} R(T, S) = (-2(T - 320), -2(S - 800)).$$

Interprétation : chaque composante indique la *sensibilité* du rendement à la variable correspondante. Si  $T < 320$  (resp.  $> 320$ ), la composante en  $T$  est positive (resp. négative) et « pousse »  $T$  vers 320. Idem pour  $S$  vers 800.

(2) **Point critique.**

$$\vec{\nabla} R(T, S) = \vec{0} \iff T = 320, S = 800.$$

$$(T^*, S^*) = (320, 800).$$

(3) **Nature du point critique (Hessienne).**

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial T^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 R}{\partial S^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(H) = (-2) \cdot (-2) - 0 = 4 > 0.$$

Avec  $H$  définie négative, on conclut :

$$(320, 800) \text{ est un maximum global de } R.$$

La valeur maximale vaut  $R(320, 800) = 1000$ .

**Exercice 7 — Équilibre thermique (Newton–Raphson)**

On cherche  $T$  tel que

$$f(T) = Q - hA(T - T_{\text{air}}) - \varepsilon\sigma A(T^4 - T_{\text{air}}^4) = 0.$$

(1) **Dérivée**  $f'(T)$ .

$$f'(T) = -hA - 4\varepsilon\sigma AT^3.$$

(Remarque :  $T_{\text{air}}$  est constant, donc  $\frac{d}{dT}(T_{\text{air}}^4) = 0$ .)

(2) **Méthode de Newton–Raphson (idée géométrique)**. On cherche la racine de  $f(T)$ , c'est-à-dire une valeur  $T$  telle que  $f(T) = 0$ . Sur le graphe de  $f$ , cela correspond au point où la courbe coupe l'axe horizontal.

La méthode consiste à partir d'une **valeur initiale**  $T_0$  et à tracer la **tangente** à la courbe en ce point  $(T_0, f(T_0))$ . Cette tangente coupe l'axe horizontal en un point : c'est la nouvelle approximation  $T_1$ . On recommence le processus : à chaque étape, on « avance » vers la racine en utilisant la tangente locale pour corriger l'estimation.

En résumé :

- on part d'un  $T_0$ ,
- on trace la tangente en  $(T_0, f(T_0))$ ,
- le point où la tangente coupe l'axe  $x$  donne  $T_1$ ,
- on recommence avec  $T_1$ , etc.

Progressivement, les approximations  $T_n$  se rapprochent de la vraie racine.

(3) **Importance du choix de  $T_0$** . Le choix de  $T_0$  est crucial :

- Si  $T_0$  est « bien placé » (zone où la pente n'est pas trop faible), la méthode converge rapidement.
- Si au contraire  $f'(T_0)$  est **nul ou presque nul**, la tangente est presque horizontale : elle coupe très loin l'axe  $x$  (ou pas du tout). Dans ce cas, l'algorithme peut diverger ou sauter sur des valeurs non physiques.
- Plus généralement, si on part trop loin de la vraie solution, la tangente peut envoyer vers une mauvaise zone, et la méthode peut ne pas converger.

**Pour aller plus loin** : Dans notre problème, une bonne idée est de prendre comme  $T_0$  la température qu'on obtiendrait en négligeant le rayonnement, c'est-à-dire

$$T_0 \approx T_{\text{air}} + \frac{Q}{hA}.$$

Ce choix fournit un point de départ raisonnable :  $f(T_0)$  n'est pas nul mais proche de 0, et  $f'(T_0)$  reste suffisamment grand pour éviter les problèmes de convergence.