Modélisation du flux thermique d'un réacteur oscillant (1h45)

Mise en contexte

On étudie un **réacteur chimique oscillant**, soumis à un flux thermique variable dû à un chauffage cyclique. Les ingénieurs cherchent à modéliser la production et la dissipation d'énergie au cours du temps, à estimer l'énergie moyenne reçue, et à optimiser la régulation thermique.

On modélise le flux thermique reçu par la paroi du réacteur par :

$$\boldsymbol{P(t) = P_0 \sin(\omega t)}, \qquad t \geq 0,$$

avec $P_0 > 0$ la puissance maximale et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{6}$ rad/h.

Exercice 1 : Variation du flux thermique.

1. Tracer, à main levée, l'allure de $P(t)$ pour $t \in [0\,;12\ h]$.
2. Calculer la dérivée $P'(t)$. Tracer son allure pour $t \in [0\,;12\ h]$.
3. Interpréter physiquement le signe de $P'(t)$ pour chaque phase du cycle complet.

Exercice 2 : Énergie reçue sur une demi-période.

On appelle $E_{\texttt{demi}}$, l'énergie thermique accumulée entre $t = 0$ et $t = T/2$ et $E_{\texttt{cycle}}$, l'énergie thermique accumulée entre $t = 0$ et $t = T$.

1. Exprimer $E_{\texttt{demi}}$, en fonction de P_0, ω et T.
2. Calculer la valeur numérique de $E_{\texttt{demi}}$ pour $P_0 = 1000$ W.
3. De même, calculer la valeur numérique de $E_{\texttt{cycle}}$. Donner une interprétation physique de cette valeur obtenue.

Exercice 3 : Approximation aux temps courts.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $P(t)$ au voisinage de $t = 0$.
2. Calculer et comparer $P(0.5\text{ h})$ obtenu avec $P_{\texttt{DL3}}(0.5\text{ h})$.

Exercice 4 : Couplage de deux zones thermiques : (sauf tiers-temps).

On modélise le transfert de chaleur entre deux zones du réacteur par : $\begin{bmatrix} Q_A \\ Q_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$.

1. Soit M, la matrice 2×2. Interpréter les coefficients de la matrice M.
2. Calculer Q_A et Q_B pour $P_1 = 800$ W et $P_2 = 600$ W.
3. Représenter, sur le même graphique, les vecteurs $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} Q_A \\ Q_B \end{bmatrix}$.
4. Calculer $\det(M)$ et donner son interprétation géométrique.
5. Calculer M^{-1}, la matrice inverse de M.

Exercice 5 : Énergie totale reçue sur une plaque.
On suppose que la densité surfacique de flux thermique sur la plaque est donnée par :

$$\boldsymbol{I(x,y) = I_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{H}\right)}, \quad 0 \le x \le L,\ 0 \le y \le H,$$

avec $L = 2$ m, $H = 1$ m et $I_0 = 800$ W/m^2.

1. Écrire P_{tot}, l'intégrale double donnant la puissance totale reçue.
2. Calculer la valeur exacte de P_{tot}.

Exercice 6 : Optimisation du rendement thermique.
On modélise le rendement en fonction de la fréquence d'oscillation ω (rad/h) et de la température X (°C) :

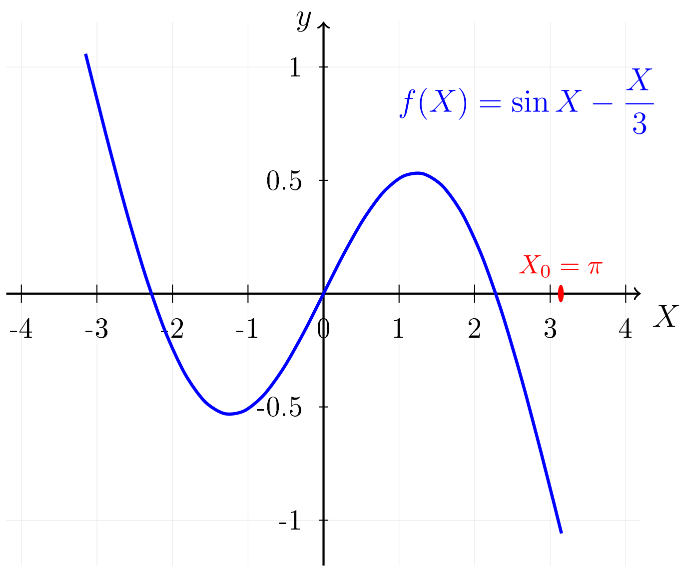
$$\boldsymbol{R(\omega, X) = X\cos(\omega) - 2\omega^2.}$$

1. Calculer le gradient $\vec{\nabla} R(\omega, X)$.
2. Déterminer les coordonnées d'un point critique (ω_0, X_0).
3. Calculer la Hessienne et déterminer la nature de ce point critique.
4. Interpréter le sens physique de ce point critique obtenu (ω_0, X_0).

Exercice 7 : Méthode de Newton–Raphson pour l'équilibre thermique.
On cherche la température d'équilibre X vérifiant :

$$\boldsymbol{f(X) = \sin(X) - \frac{X}{3} = 0.}$$

1. Écrire la dérivée $f'(X)$.
2. Expliquer la méthode de résolution de Newton-Raphson.
3. On démarre de $X_0 = \pi$, calculer X_1 l'approximation de la racine de $f(X)$ après une itération de la méthode de Newton-Raphson. Exprimer sa valeur exacte (fonction de π).



Rappels utiles

Développement limité de $\sin(x)$ en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Taylor–Young (ordre 1) au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$