Modélisation de la production solaire d'une centrale (1h30)

Mise en contexte

On s'intéresse à la modélisation mathématique du fonctionnement d'une **centrale solaire**. Différents aspects de son exploitation sont étudiés : la **production d'énergie au cours du temps**, les **bilans énergétiques**, l'usage d'**approximations locales** (développements limités), la **répartition des flux** entre plusieurs unités (matrices), l'**optimisation de rendement** selon plusieurs paramètres (fonction de plusieurs variables), et enfin la **résolution numérique** d'équations non linéaires (Newton–Raphson).

On modélise la puissance solaire reçue par la centrale par :

$$\boldsymbol{P(t) = P_0\left(1 - e^{-kt}\right), \qquad t \geq 0,}$$

avec $P_0 > 0$ (puissance crête au zénith) et

$$\boldsymbol{k = \ln 2 \ \mathrm{h}^{-1} \approx 0{,}693 \ \mathrm{h}^{-1}.}$$

Exercice 1 : Variations de la production.

1. Dessiner, à main levée, l'allure de $P(t)$.
2. Calculer $P'(t)$.
3. (a) Dessiner, à main levée, l'allure de $P'(t)$.
   (b) Justifier que le signe de $P'(t)$ est cohérent avec votre interprétation physique.
   (c) Justifier que l'évolution de $P'(t)$ est cohérente avec votre interprétation physique.

Exercice 2 : Calcul d'énergie.

On suppose que l'on opère du lever du soleil ($t = 0$) au zénith ($t = T_z = 6$ h). L'énergie électrique totale produite le matin s'exprime à l'aide d'une intégrale :

$$\boldsymbol{E_{\text{matin}} = \int_0^{T_z} P(t)\, dt.}$$

1. Expliquer pourquoi l'énergie s'exprime à l'aide de cette intégrale.
2. Calculer E_{matin} sous forme littérale en fonction de k, T_z et P_0.

Exercice 3 : Approximation du début de matinée ("petits t").

1. Développer $P(t)$ en série de Taylor à l'ordre 2, au voisinage de $t = 0$. En déduire une approximation linéaire et quadratique de $P(t)$.
2. Comparer la valeur exacte de $P(0.5 \text{ h})$ vs. DL1 et DL2.
3. **Énergie approchée à court terme $E_{\mathbf{DL2}}(T)$ avec le DL2 de $P(t)$.**
   Calculer $E_{\text{DL2}}(T)$ en fonction de k, P_0 et T :

$$\boldsymbol{E_{\text{DL2}}(T) = \int_0^T P_0\left(kt - \frac{(kt)^2}{2}\right) dt,}$$

Exercice 4 : Mélange de flux.
Deux types de panneaux (A et B) reçoivent deux flux distincts P_1, P_2. On modélise la répartition par :

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

1. Que signifient les valeurs des 2 colonnes de la matrice ?
2. Calculer P_A et P_B pour $P_1 = 1$ kW et $P_2 = 0.5$ kW.
3. Représenter, sur le même graphique, les vecteurs $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix}$.
4. Calculer le déterminant de la matrice.
5. Expliquer : quelle est l'interprétation géométrique de ce déterminant sur le plan (P_1, P_2) ?
6. Que se passerait-il si le déterminant était nul ?

Exercice 5 : Flux total sur un champ.
On donne $I(x, y)$, la puissance surfacique reçue par les panneaux solaires. On modélise l'ensoleillement sur un champ rectangulaire $0 \leq x \leq 20$ m, $0 \leq y \leq 10$ m par :

$$\boldsymbol{I(x,y) = I_0 \cos\left(\frac{\pi x}{40}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{20}\right),} \quad \text{avec } \boldsymbol{I_0 = 1000} \ \mathrm{W/m}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{.}$$

1. Écrire l'intégrale double donnant la puissance totale reçue par le champ.
2. Calculer sa valeur exacte.

Exercice 6 : Rendement de la centrale.
On modélise le rendement global en fonction de la température T et de l'ensoleillement S :

$$\boldsymbol{R(T, S) = -(T - 320)^2 - (S - 800)^2 + 1000.}$$

1. Calculer $\vec{\nabla} R(T, S)$. Donner une interprétation physique des deux composantes.
2. Déterminer les coordonnées du point critique.
3. Calculer le déterminant de la Hessienne au point critique et conclure sur sa nature.

Exercice 7 : Détermination de la température d'équilibre par méthode de Newton–Raphson.
On cherche la température d'équilibre T d'une plaque solaire chauffée par un flux Q, soumise à convection et rayonnement. On cherche donc une racine de la fonction $f(T)$ suivante :

$$\boldsymbol{f(T) = Q - hA\,(T - T_{\text{air}}) - \varepsilon\sigma A\,(T^4 - T_{\text{air}}^4) = 0.}$$

1. Écrire la dérivée $f'(T)$.
2. Expliquer la méthode de résolution de Newton-Raphson.
3. Discuter l'importance du choix de la valeur initiale T_0 pour la convergence.

Rappels utiles

Développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 :

$$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).}$$