

DS S3 - Mathématiques appliquées

Durée : 1 heure 45 Total : 30 points Calculatrices type collège autorisées.

Tous les résultats des exercices 1, 2 et 3 doivent être inscrits dans les encadrés prévus à cet effet. Dans ces cas, seuls le calcul et le résultat sont attendus.

Exercice 1 : Dénombrement d'une séquence ADN (5 pts)

L'ADN est une molécule formée d'un grand nombre de nucléotides. Dans une séquence d'ADN, les nucléotides peuvent être de 4 types : A (adénine), T (thymine), G (guanine) ou C (cytosine).

1. **Supposons qu'une séquence spécifique de 4 nucléotides soit analysée.**

- Combien de séquences d'ADN différentes $N_{1,a}$ contenant chacun des 4 types de nucléotides peuvent-elles être formées ?
- Combien de séquences d'ADN différentes $N_{1,b}$ peuvent-elles être formées en utilisant exactement une seule fois les nucléotides A et T, 2 fois le nucléotide G et 0 fois le nucléotide C ?

2. **Supposons qu'une séquence spécifique de 10 nucléotides soit analysée.**

- Combien de séquences d'ADN différentes $N_{2,a}$ peuvent-elles être formées ?
- Combien de séquences d'ADN différentes $N_{2,b}$ peuvent être formées comprenant 3 fois les nucléotides A, T et G, et une seule fois le nucléotide C ?
- Chaque nucléotide peut apparaître au maximum 3 fois dans une séquence, combien de séquences différentes $N_{2,c}$ sont possibles avec ces restrictions ?

Exercice 2 : Probabilités au jeu EuroMillions (3 pts)

Pour jouer à EuroMillions - My Million, il suffit de cocher 7 numéros : 5 numéros sur une grille de 50 numéros et 2 étoiles (c'est-à-dire 2 autres numéros) sur une grille de 12 numéros. Vous remportez le jackpot si vous avez coché les 5 numéros gagnants et les 2 étoiles. Vous exprimerez les probabilités sous la forme $p = \frac{1}{N}$ avec N entier.

- Calculer $p_{5,2}$ la probabilité de gagner le jackpot à EuroMillions.
- Quelle est la probabilité $p_{4,1}$ de tirer exactement 4 bons numéros et une seule étoile ?

Exercice 3 : Loïs de probabilité discrètes (6 pts)

Au restaurant universitaire (RU), on estime que 75% des étudiants fréquentent le RU pour déjeuner chaque jour. On sélectionne au hasard un groupe de 20 étudiants.

Question 1 : Quel est le nombre n_1 le plus probable d'étudiants qui déjeunent au RU dans ce groupe ? Avec quelle probabilité p_1 ?

Question 2 : Calculer la probabilité p_2 qu'il y ait au moins 18 étudiants sur les 20 qui fréquentent le RU pour déjeuner.

Une usine produit 4000 composants électroniques par jour. En moyenne, 4 composants sont défectueux chaque jour. La variable aléatoire qui compte le nombre de composants défectueux suit une distribution de Poisson.

Question 3 : Calculer la probabilité p_3 d'avoir au moins 4 composants électroniques défectueux en une journée.

Une personne dispose de 15 € pour acheter des fournitures scolaires. Elle peut acheter uniquement des cahiers, des stylos et des gommes. Chaque article coûte exactement 1 €.

Question 4 : Combien de façons différentes N_{15} cette personne peut-elle répartir son budget entre ces trois types de fournitures ?

Une particule se désintègre en trois fragments. L'énergie cinétique totale de la désintégration est de 2 MeV. L'énergie de chaque fragment peut être exprimée en quanta de 0,2 MeV, et chaque fragment peut recevoir un nombre entier de quanta (y compris zéro).

Question 5 : Combien de façons différentes $N_{2\text{MeV}}$ peut-on répartir cette énergie cinétique entre les trois fragments ?

Exercice 4 : Loi normale (6 pts)

Une équipe de chercheurs mesure le temps nécessaire à un groupe de 1000 athlètes pour terminer une course de 100 mètres. Ils estiment, lors de la première phase du test, que les temps de course suivent une distribution normale avec une moyenne de 12,5 secondes et un écart-type de 1 seconde.

1. Calculez le nombre d'athlètes qui ont terminé la course en moins de 10 secondes.
2. Déterminez la probabilité qu'un athlète choisi au hasard termine la course entre 11,5 et 13,5 secondes.
3. Combien d'athlètes sont-ils plus lents que 14 secondes ?
4. Supposons que les 30 coureurs les plus rapides sont qualifiés pour les phases finales. Quel est le temps maximal qu'un athlète peut réaliser pour se qualifier ?

Lors de la seconde phase de test, les coureurs ont accès à une nouvelle paire de chaussures. La distribution des coureurs suit toujours une loi normale mais ses paramètres ont changé. L'objectif de cette question est de déterminer ces 2 paramètres.

5. 20 athlètes ont couru en moins de 10 secondes et 54 athlètes ont couru en plus de 14 secondes. Quels sont les nouveaux paramètres μ et σ ?

En réalité, aucun athlète n'est parvenu à courir le 100 m en moins de 9,5 secondes, alors que 10 athlètes ont couru en plus de 15 secondes. La loi est en fait asymétrique. Le coefficient d'asymétrie est défini ainsi $\gamma = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right]$.

6. γ est-il négatif, nul ou positif ? Justifier et expliquer comment la loi est transformée.

Exercice 5 : Loi binomiale et loi de Poisson (4 pts)

Un vaccin protège contre une maladie rare dont la probabilité d'infection (chez les non-vaccinés) est $p = 0.004$. On suit une cohorte de $n = 500$ personnes vaccinées, chez qui on suppose que la probabilité de contracter la maladie reste égale à p .

1. Calculez la probabilité qu'au plus 2 personnes soient infectées avec la loi binomiale et avec la loi de Poisson.
2. Comparez vos résultats. Expliquez les différences.
3. Discutez de l'importance de la taille de l'échantillon n et de la valeur de p .

Exercice 6 : Polynômes (6 pts)

Soient les polynômes

$$P_1(x) = (2 + x)^7 \quad ; \quad P_2(x) = (1 + x)^4 \quad ; \quad P_3(x) = (1 + x)^n.$$

1. Développer $P_1(x)$.
2. Résoudre l'équation $x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x - 77997 = 0$.
3. Développer $P_2(x)$.
4. Calculer $P_2(-1)$ à partir de la forme développée et à partir de la forme factorisée.
5. Expliquer pourquoi, dans $(1 + x)^n$, la somme des coefficients d'ordre pair est égale à la somme des coefficients d'ordre impair.
6. Expliquer pourquoi, dans $(1 + x)^n$, la somme des coefficients d'ordre pair est égale à 2^{n-1} .

Document réponse

Exercice 1 :

$$N_{1,a} = \quad ; \quad N_{1,b} = \quad ; \quad N_{2,a} = \quad ;$$

$$N_{2,b} = \quad ; \quad N_{2,c} =$$

Exercice 2 :

$$p_{5,2} = \quad ; \quad p_{4,1} =$$

Exercice 3 :

$$n_1 = \quad ; \quad p_1 =$$

$$p_2 = \quad ; \quad p_3 =$$

$$N_{15} = \quad ; \quad N_{2\text{MeV}} =$$