DS — Probabilités et Statistiques

Thème : Contrôle qualité d'un polymère hydrosoluble

Contexte : Une usine produit un **polymère hydrosoluble** conditionné en sachets. Le laboratoire contrôle : l'homogénéité des lots, la **conformité** des sachets, l'apparition de **défauts rares**, la masse réellement remplie et la **viscosité mesurée**. Ces phénomènes relèvent de modèles probabilistes différents (binomiale, Poisson, normale) pour évaluer la **qualité**, la **stabilité** et la **fiabilité** du procédé.

Exercice 1 — Échantillonnage des sachets

Un carton contient **80 sachets**, dont **12 sont suspects**. Chaque matin, on prélève **10 sachets** pour contrôle.

1) Combien de prélèvements distincts de 10 sachets peut-on constituer ?
2) Combien de prélèvements de 10 sachets ne contiennent **aucun** sachet suspect ?
3) Combien de prélèvements contiennent exactement **3 sachets suspects** ?
4) Quelle est la probabilité qu'un prélèvement contienne **au moins un** sachet suspect ?

Exercice 2 — Sachets conformes

Grâce au réglage du remplisseur automatique, chaque sachet a une probabilité $p = 0{,}92$ d'être conforme (bonne masse et bon scellement). On inspecte un petit lot-test de **25 sachets**.

1) Calculer la probabilité d'avoir 23 sachets conformes dans le lot.
2) Calculer la probabilité d'avoir au plus 1 sachet non conforme dans le lot.
3) Donner l'espérance et la variance du nombre de sachets conformes. Interpréter physiquement la stabilité du procédé à cette échelle.

Exercice 3 — Défauts d'humidité

On observe en moyenne $\lambda = 3$ sachets humides pour 500 unités produites. L'apparition est rare, indépendante et due à des micro-infiltrations.

1) Justifier l'utilisation d'une loi de Poisson.
2) Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 sachets humides sur un lot de 500.
3) Quelle est la probabilité d'avoir 0 ou 1 sachet humide ?
4) Sur un lot de 2000 sachets, quelle probabilité de trouver entre 2 et 5 sachets humides ?

Exercice 4 — Pourquoi la masse suit-elle une loi normale ?

Chaque sachet est rempli par micro-apports successifs de granulés (ordre de grandeur : 10^{10} particules). Chaque apport individuel possède une masse légèrement variable et indépendante des autres. On note X la masse totale d'un sachet (en g).

1) Expliquer pourquoi un modèle de Poisson n'est pas adapté pour décrire la masse du sachet.
2) On peut approximer la formation du sachet comme une succession d'expériences de Bernoulli. Décrire cette expérience élémentaire et préciser quelle variable aléatoire suit alors une loi binomiale.
3) Justifier que la distribution de X peut être modélisée par une loi normale.
4) On admet finalement que : $X \sim \mathcal{N}(50{,}0\,;\,0{,}45^2)$.

   Interpréter physiquement ce que représentent ces valeurs pour la stabilité du procédé.

Exercice 5 — Mesure de la viscosité

Le viscosimètre mesure la viscosité du polymère hydrosoluble. Les mesures donnent :

$$X \sim \mathcal{N}(92\ ;\ 4^2) \quad (\mathrm{mPa}\cdot\mathrm{s}).$$

1) Calculer la probabilité qu'une mesure soit hors de l'intervalle de tolérance [88 ; 96].
2) Déterminer la viscosité correspondant au **90e percentile**.
3) Donner un intervalle symétrique autour de μ contenant **95 %** des valeurs possibles.
4) Expliquer physiquement pourquoi la viscosité mesurée suit une loi normale.

Exercice 6 — Incertitudes du viscosimètre

Lors de l'étalonnage sur une solution de référence, on observe que 2,5 % des mesures sont inférieures à 89 mPa · s et 5 % sont supérieures à 103 mPa · s.

On admet :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

1) Déterminer μ et σ.
2) Probabilité qu'une mesure soit hors de l'intervalle [90 ; 100].
3) Pour 9 mesures indépendantes, donner la loi de la moyenne $\overline{X}$.
4) Donner un intervalle symétrique contenant 99 % des valeurs possibles de $\overline{X}$.
5) Expliquer ce que révèlent vos valeurs de μ et σ sur : **(i)** le biais du viscosimètre, **(ii)** son incertitude aléatoire.