

Corrigé — DS Probabilités et Statistiques

Thème : Mesure expérimentale en chimie industrielle

Exercice 1 — Sélection des échantillons

On tire 8 flacons parmi 50 sans ordre, donc on utilise les combinaisons.

1)

$$N_1 = \binom{50}{8} = 536\,878\,650.$$

2)

$$N_2 = \binom{5}{2} \binom{45}{6} = 10 \times 8\,145\,060 = 81\,450\,600.$$

3) Le complément de « au moins un suspect » est « aucun suspect » :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun}) = 1 - \frac{\binom{45}{8}}{\binom{50}{8}} \approx 1 - 0,4015 \approx 0,599.$$

Exercice 2 — Réaction moléculaire (binomiale)

Ici $X \sim \mathcal{B}(n = 20, p = 0,72)$.

1)

$$P(X = 15) = \binom{20}{15} (0,72)^{15} (0,28)^5 \approx 0,1933.$$

2)

$$P(X \geq 18) = \sum_{k=18}^{20} \binom{20}{k} (0,72)^k (0,28)^{20-k} \approx 0,0526.$$

3)

$$\mathbb{E}[X] = np = 20 \times 0,72 = 14,4, \quad \text{Var}(X) = np(1-p) = 20 \times 0,72 \times 0,28 = 4,032.$$

4) Pour un petit échantillon ($n = 20$), la fluctuation relative est notable :

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} \approx \sqrt{4,032} \approx 2,01,$$

donc le nombre de réactions varie typiquement de l'ordre de $14,4 \pm 2$. À petite échelle, le rendement observé n'est donc pas parfaitement stable.

Exercice 3 — Impuretés rares (Poisson)

Ici $X \sim \mathcal{P}(\lambda = 14)$.

1) Le phénomène est *rare*, indépendant, et observé sur un grand nombre d'occasions : le modèle de comptage de Poisson est adapté.

2)

$$P(X = 14) = e^{-14} \frac{14^{14}}{14!} \approx 0,1060.$$

3)

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 e^{-14} \frac{14^k}{k!} \approx 4,74 \times 10^{-4}.$$

4)

$$P(13 \leq X \leq 15) = \sum_{k=13}^{15} e^{-14} \frac{14^k}{k!} \approx 0,3109.$$

Sur 100 portions :

$$N \approx 100 \times 0,3109 \approx 31 \text{ portions.}$$

Exercice 4 — Réaction principale (approximation normale)

- 1) La loi de Poisson suppose un événement rare ($p \ll 1$). Ici $p \simeq 0,72$: l'événement est fréquent, donc Poisson n'est pas pertinent.
- 2) Lorsque n est immense et que $0 < p < 1$ est constant,

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

(par théorème central limite).

- 3) On standardise :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Alors

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0,9545 \text{ (lecture sur la table).}$$

- 4) Interprétation : sur une portion contenant un nombre gigantesque de molécules, le nombre de réactions est **extrêmement stable** : plus de 95 % des portions donnent un résultat à moins de 2σ de la moyenne.

Exercice 5 — Mesure spectrophotométrique (normale)

Ici $X \sim \mathcal{N}(\mu = 0,84, \sigma = 0,05)$.

- 1) Standardisation :

$$z_1 = \frac{0,80 - 0,84}{0,05} = -0,8, \quad z_2 = \frac{0,90 - 0,84}{0,05} = 1,2.$$

$$P(0,80 \leq X \leq 0,90) = \Phi(1,2) - \Phi(-0,8) \approx 0,6731.$$

Donc

$$P(\text{hors tolérance}) \approx 1 - 0,6731 = 0,3269.$$

2)

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68.$$

- 3) Le 90e percentile vérifie
- $\Phi(z_{0,9}) = 0,9$
- , donc
- $z_{0,9} \approx 1,2816$
- .

$$x_{0,9} = \mu + z_{0,9}\sigma = 0,84 + 1,2816 \times 0,05 \approx 0,904.$$

- 4) Pour 95 % symétriques :
- $z_{0,975} \approx 1,96$
- .

$$[\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma] = [0,84 - 0,098, 0,84 + 0,098] \approx [0,742; 0,938].$$

- 5) Les mesures résultent de la somme de nombreux bruits indépendants (thermique, électronique, photonique, optique) \Rightarrow normalité par Théorème Central Limite.

Exercice 6 — Incertitudes de mesure (normale)

On suppose $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1)

$$P(X < 0,78) = 0,025 \Rightarrow \frac{0,78 - \mu}{\sigma} = z_{0.025} \approx -1,96,$$

$$P(X > 0,90) = 0,05 \Rightarrow P(X \leq 0,90) = 0,95 \Rightarrow \frac{0,90 - \mu}{\sigma} = z_{0.95} \approx 1,645.$$

Système :

$$\begin{cases} 0,78 = \mu - 1,96\sigma, \\ 0,90 = \mu + 1,645\sigma. \end{cases}$$

Donc

$$\sigma = \frac{0,90 - 0,78}{1,645 - (-1,96)} \approx 0,0333, \quad \mu = 0,78 + 1,96\sigma \approx 0,845.$$

2)

$$P(\text{non conforme}) = 1 - P(0,80 \leq X \leq 0,90).$$

$$z_1 = \frac{0,80 - \mu}{\sigma} \approx -1,359, \quad z_2 = \frac{0,90 - \mu}{\sigma} = 1,645.$$

$$P(0,80 \leq X \leq 0,90) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \approx 0,8630,$$

$$P(\text{non conforme}) \approx 0,137.$$

3) Moyenne de $m = 9$ mesures indépendantes :

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{9}\right), \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{3} \approx 0,0111.$$

4) Pour 99% symétriques autour de \bar{x} ,

$$P(|Z| \leq z_{0.995}) = 0,99, \quad z_{0.995} \approx 2,576.$$

$$U = z_{0.995} \sigma_{\bar{X}} \approx 2,576 \times 0,0111 \approx 0,0286.$$

Donc l'intervalle est

$$[\bar{x} - U, \bar{x} + U] \approx [\bar{x} - 0,0286, \bar{x} + 0,0286].$$

5) **Biais** : si μ est décalée de la vraie valeur, l'instrument est systématiquement faux.
Incertitude aléatoire : σ mesure la dispersion due au bruit, réduite par moyennage.