IUT Lyon 1
l'excellence technologique
Département Génie Chimique
Génie des Procédés

Mathématiques

Première année - Semestre 1

Département de Génie Chimique, Génie des Procédés
IUT Lyon 1

2024-2025

Table des matières

1. AJOUTER NOMBRES COMPLEXES

Objectifs des chapitres

Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions numériques

— Ensemble de nombres, intervalle, inclusion, exclusion, réunion, intersection.

— Fonction, image/antécédent, domaine de définition, (dé)croissante/monotone, strictement (dé)croissante, strictement monotone, paire/impaire, composition de fonctions.

— Limites, limites comparées exp/polynômes/ln, factorisation par le terme dominant, règle de l'Hospital.

— Dérivation (uv)' ; (u/v)' ; (f ∘ g)' $\Rightarrow$ $\exp(u)'$; $\ln(u)$' ; $(u^n)'$.

— Étude d'une fonction.

— Être capable de tracer $\frac{1}{x}$, cos x, sin x, x^2, x^3, e^x, $\ln(x)$, $\sqrt{x}$, $2x+1$, $(x-1)^2+3$.

Chapitre 2 : Fonctions usuelles

— Domaines de définition, dérivée et graphique de e^x, $\ln(x)$, $\tan(x)$, $\arctan(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$.

— Opérations sur les e^x, $\ln(x)$.

Chapitre 3 : Intégration

— Calculer une primitive, une intégrale.

— Utiliser la formule de l'IPP (et la correspondance ALPES).

Chapitre 4 : Équations différentielles

— Résoudre une ED du 1er ordre avec ou sans second membre.

— Résoudre une ED du 2nd ordre avec ou sans second membre.

Remarque générale

Maîtriser un mot/une notion signifie :

1. être capable de faire une phrase en français pour le/la définir
2. connaître sa correspondance en "langage mathématique"
3. être capable de donner un exemple avec une représentation graphique

Exemple : **La fonction f est paire.** Il faut être capable :

1. de dire que la représentation graphique de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées Oy
2. d'écrire $f(x) = f(-x)$
3. d'avoir les représentations graphiques des fonctions x^2 et $cos\ x$ en tête et être capable de les tracer, en notant les coordonnées des points importants.

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions numériques

1

L'objectif de ce chapitre est de faire des rappels sur ce que vous avez vu au lycée à propos des fonctions numériques.
Nous étudierons dans le chapitre suivant plus en détail les fonctions usuelles.

1 Ensembles de nombres

On appelle **ensemble de nombres** E une collection de nombres distincts, bien définis, que l'on peut caractériser sans ambiguïté.

Si l'ensemble est **discontinu**, on note ses éléments entre accolades.

Exemple 1.1
L'ensemble des nombres entiers compris entre $-2,5$ *et* $2,5$ *est* $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Lorsque l'ensemble est continu, on peut le noter entre crochets et on parle alors d'**intervalle**.

Exemple 1.2

- *L'intervalle des nombres réels compris entre* -2 *et* 2*, ces deux valeurs étant incluses est noté* $[-2, 2]$.
- *L'intervalle des réels compris entre* -2 *et* 2*, ces deux valeurs étant exclues est noté* $]-2, 2[$.
- *L'intervalle des réels inférieurs ou égaux à* -2 *est noté* $]-\infty, -2]$.

Pour définir un ensemble on peut écrire chacun des éléments, les désigner par une formule générale, ou faire appel à une logique de récurrence.

Exemple 1.3
L'ensemble des entiers positifs pairs peut être noté $E = \{2k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}^+\}$ *ou* $E = \{0 \ ; \ 2 \ ; \ 4 \ ; \ ...\}$

Pour signifier qu'un élément a appartient à l'ensemble E, on note $a \in E$. Pour signifier qu'un élément a n'appartient pas à l'ensemble F, on note $a \notin F$.

Exemple 1.4
Soit l'ensemble $E = \{-2 \ ; \ -1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ; \ 2\}$ *:* $-2 \in E$ *mais* $3 \notin E$.

Ensembles usuels :

- Ensemble des nombres entiers naturels (entiers positifs) :

$$\mathbb{N} = \{0 \ ; \ 1 \ ; \ 2 \ ; \ ...\}$$

- Ensemble des nombres entiers relatifs (tous les entiers, positifs ou négatifs) :

$$\mathbb{Z} = \{... \ ; \ -2 \ ; \ -1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ; \ 2 \ ; \ ...\}$$

- Ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad ; \quad b \neq 0 \right\}$$

  C'est l'ensemble des nombres qui s'expriment comme le quotient de deux nombres entiers. Le développement décimal d'un nombre rationnel est toujours périodique au bout d'une certaine décimale.

- Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
  C'est l'ensemble des nombres qui peuvent être représentés par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales, par forcément périodiques.

- Ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + ib \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

- L'ensemble vide (qui ne contient aucun élément) est noté $\emptyset$.

Exclusion de certaines valeurs :

- Pour signifier que l'on ne considère que les nombres positifs dans un ensemble donné, on ajoute un $+$ en indice.
  De même pour signifier que l'on ne considère que les nombres négatifs dans un ensemble donné, on ajoute un $-$ en indice.

  Exemple 1.5
  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{0 \ ; \ 1 \ ; \ 2 \ ; \ ...\}$
  $\mathbb{Z}_- = \{... \ ; \ -2 \ ; \ -1 \ ; \ 0\}$

- Pour signifier que l'on exclut le nombre 0, on ajoute un $*$ en exposant.

  Exemple 1.6
  $\mathbb{Z}^* = \{... \ ; \ -2 \ ; \ -1 \ ; \ 1 \ ; \ 2 \ ; \ ...\}$

- On peut exclure certaines valeurs d'un ensemble en utilisant le symbole $\setminus$.

  Exemple 1.7
  Pour l'ensemble E contenant "tous les nombres entiers naturels sauf les multiples de 10", on peut écrire : $E = \mathbb{N} \setminus \{10k \quad ; \quad k \in \mathbb{N}\}$

Relations entre les ensembles :

Soient deux ensembles E et F.

- Si tous les éléments de E appartiennent également à F, on dit que E est **inclus** dans F et on note : $E \subset F$.

  Exemple 1.8
  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

- L'ensemble des éléments qui sont à la fois des éléments de E et des éléments de F est appelé **intersection** des ensembles E et F et est noté $E \cap F$.

  Exemple 1.9
  Soient $E = \{1, 2, 3\}$ *et* $F = \{2, 3, 4, 5\}$*, alors* $E \cap F = \{2, 3\}$

- L'ensemble des éléments qui sont des éléments de E ou des éléments de F est appelé **réunion** des ensembles E et F et est noté $E \cup F$.
  Attention, en mathématiques le mot "ou" est un "ou" inclusif : il signifie ou/et.

  Exemple 1.10
  Soient $E = \{1, 2, 3\}$ *et* $F = \{2, 3, 4, 5\}$*, alors* $E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Ensembles de n-upplets :

On peut également ne pas considérer des nombres isolés mais des couples de nombres, des triplets, des quadruplets, etc ...
Par exemple lorsque l'on trace un graphique, un point du plan est représenté par deux nombres : son abscisse x et son ordonnée y. Ainsi les points du plan peuvent être représentés par l'ensemble $\{(x, y) \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R}\}$.
Cet ensemble est noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement, on appelle **produit cartésien** d'un ensemble $E = \{a\}$ par un ensemble $F = \{b\}$ l'ensemble des couples (a, b), et on le note $E \times F = \{(a, b)\}$.
Dans le cas particulier où $E = F$ on note $E \times E = E^2$.

2 Fonctions

2.1 Définition

Une **fonction** est une relation entre un ensemble de départ E et un ensemble d'arrivée F, qui à tout élément de E fait correspondre un élément de F.
On note :

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

x est un élément de l'ensemble E.
y est un élément de l'ensemble F, qui est lié à x par une relation précise définissant la fonction.

y et appelé ***image*** de x par f.
x et appelé ***antécédent*** de y par f.

Exemple 1.11
La fonction carrée est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$ que l'on peut écrire :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

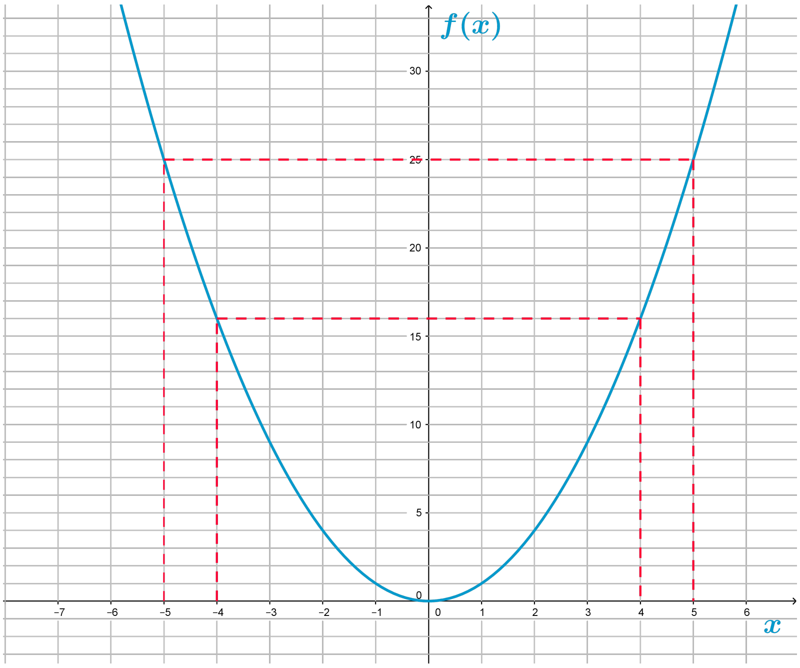
Remarque 1.1
Il faut faire attention à ne pas confondre la ***fonction*** *f avec le* ***nombre*** *$f(x)$.*

2.2 Représentation graphique d'une fonction

La représentation d'une fonction $f : x \mapsto y = f(x)$ dans un repère $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y).
L'étendue des ensembles de départ et d'arrivée étant souvent différentes, on ne représentera pas toujours (et même très rarement) les fonctions dans un repère orthonormé.

Exemple 1.12

$f : x \mapsto x^2$



2.3 Domaine de définition d'une fonction

Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f est le sous-ensemble des réels possédant une image par la fonction f.

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction il faut se poser la question : *pour quelles valeurs de x a-t-on le droit de calculer $f(x)$?*

Voici le rappel de quelques règles pouvant vous aider à déterminer l'ensemble de définition d'une fonction :

- Le dénominateur d'une fraction ne doit pas s'annuler ;
- Ce qu'il y a sous une racine carrée doit être positif ou nul ;
- $x^2 = x_0 \iff x = \sqrt{x_0}$ ou $x = -\sqrt{x_0}$;
- $\sqrt{x^2} = |x|$ (et pas "x ou - x" comme certains d'entre vous auront envie de l'écrire, car une racine est toujours positive...).

Exemple 1.13

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
  Il ne faut pas que $x = 0$: $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}^*$.
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.
  Il faut $x - 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 1$: $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$.
  Il faut $x \geq 0$: $\mathcal{D}_3 = \mathbb{R}_+$.

- $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.
  Il faut $x-1>0$ *(≥ 0 à cause de la racine et $\neq 0$ car cette racine est au dénominateur d'une fraction)*
  $\Longrightarrow x > 1$ *:* $\mathcal{D}_4 =]1\ ;\ +\infty[$.
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{|x|}$.
  Il n'y a aucune restriction : $\mathcal{D}_5 = \mathbb{R}$.
- $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
  Il ne faut pas que $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$ *:* $\mathcal{D}_6 = \mathbb{R} \setminus \{1\ ;\ -1\}$.

2.4 Sens de variation d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f$ et soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$.

- f est **croissante** sur l'intervalle I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

  f est **strictement croissante** sur l'intervalle I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

- f est **décroissante** sur l'intervalle I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

  f est **strictement** décroissante sur l'intervalle I si :

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

- f est **monotone** sur l'intervalle I si f est uniquement croissante sur I ou uniquement décroissante sur I.
  f est **strictement monotone** sur l'intervalle I si f est uniquement strictement croissante sur I ou uniquement strictement décroissante sur I.

2.5 Parité

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle D.

- f est **paire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro et si pour tout x de l'intervalle de définition $f(-x) = f(x)$:

$$\forall x \in D \quad : \quad -x \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$$

- f est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à zéro et si pour tout x de l'intervalle de définition $f(-x) = -f(x)$:

$$\forall x \in D \quad : \quad -x \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$$

Pour déterminer la parité d'une fonction, il faut procéder de la manière suivante :

$\mathcal{D}_f$ est-il centré en 0 ?
$\nearrow$ Non : Il n'y a pas lieu d'étudier la parité
$\searrow$ Oui : On calcule $f(-x)$ <u>pour tout $x \in \mathcal{D}_f$</u>
  $\nearrow$ $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire
  $\longrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$: la fonction est impaire
  $\searrow$ $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$: la fonction n'est ni paire ni impaire

Propriétés des courbes représentatives des fonctions paires et impaires :

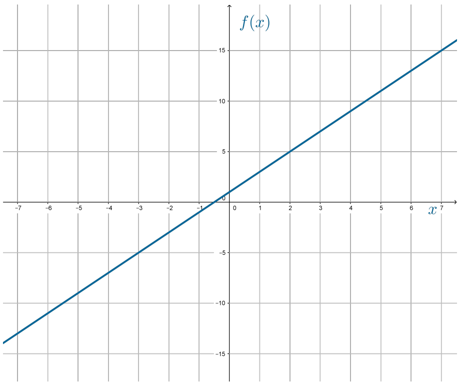
- La courbe représentative des fonctions paires dans un plan $(x\ ;\ y)$ orthogonal est symétrique par rapport à la droite $x = 0$.

- La courbe représentative des fonctions impaires dans un plan $(x\ ;\ y)$ orthogonal est symétrique par rapport à l'origine $(0\ ;\ 0)$.

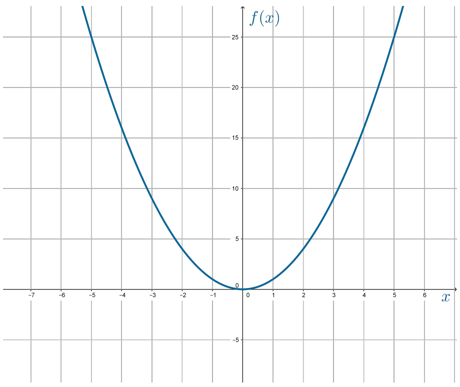
3 Exemples de fonctions

Préciser pour chacune des fonctions suivantes son domaine de définition et étudier sa parité.

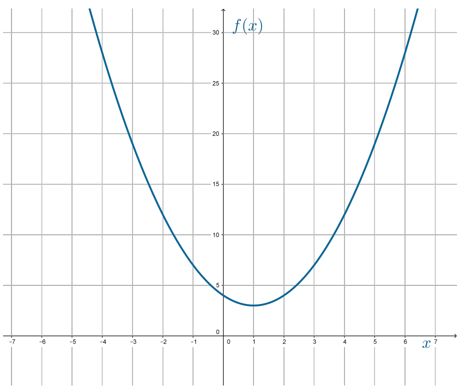
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$$



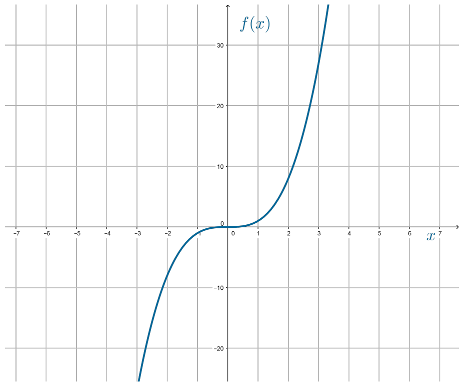
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$



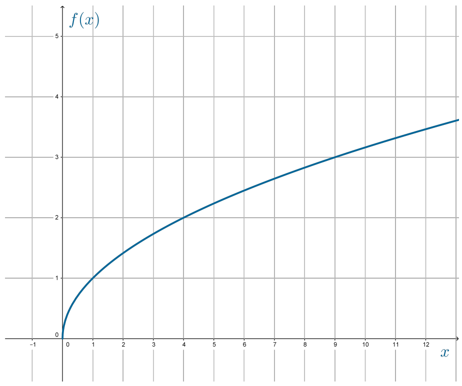
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & (x-1)^2+3 \end{array}$$



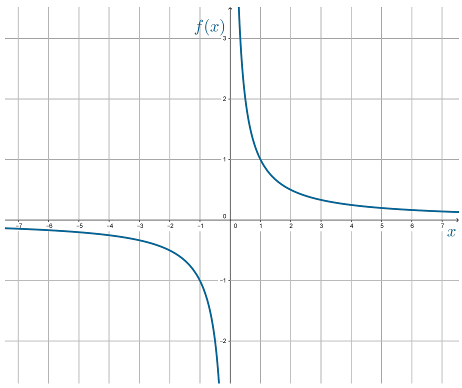
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$



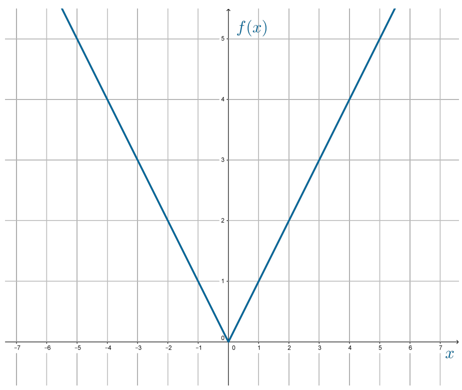
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$



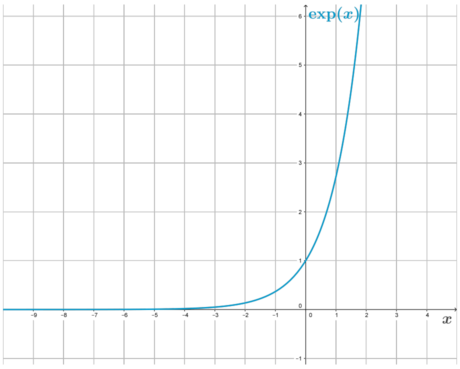
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$



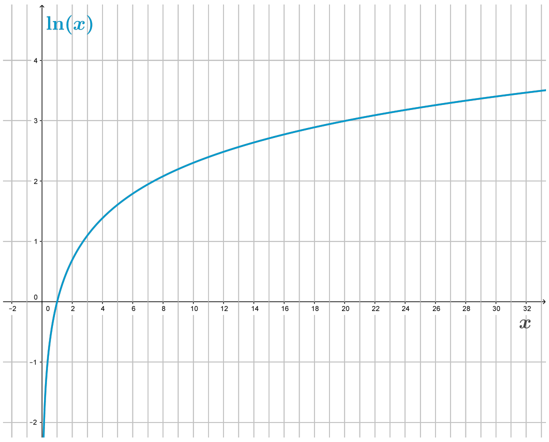
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$



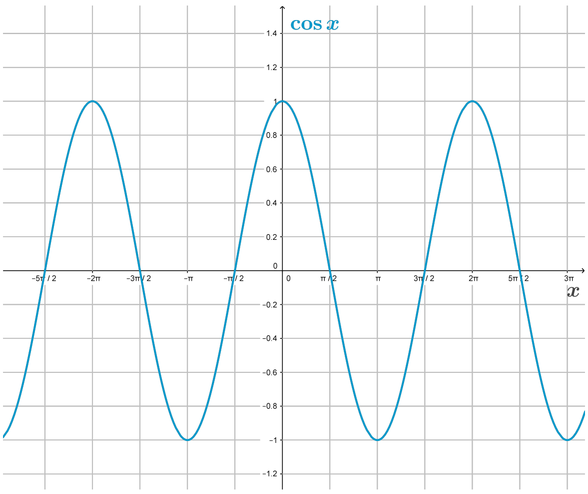
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & e^x \end{array}$$



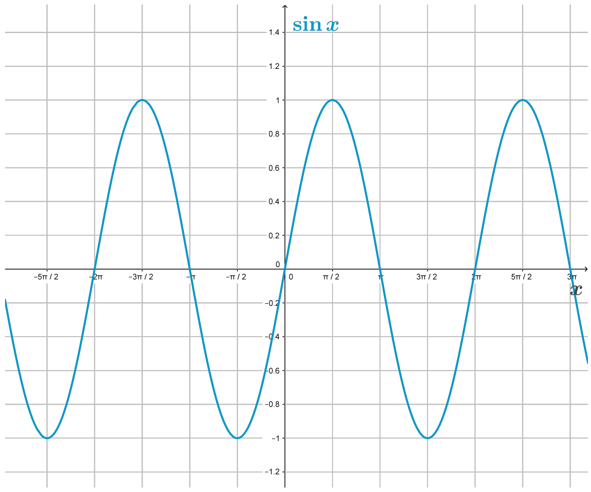
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln x \end{array}$$



$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & [-1\ ;\ 1] \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}$$



$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & [-1\,;\,1] \\ & x & \mapsto & sinx \end{array}$$



4 Opérations sur les fonctions

Soient deux fonctions f et g définies respectivement sur les ensembles $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

4.1 Addition de fonctions

La somme des fonctions f et g est la fonction s définie par :

$$s = f + g \quad : \quad x \mapsto s(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Domaine de définition :

On calcule séparément $f(x)$ et $g(x)$ donc x doit appartenir aux deux domaines de définition :

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

Cette opération est :

- commutative : $(f+g) = (g+f)$
- associative : $f + (g+h) = (f+g) + h = f + g + h$

Exemple 1.14
Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$. On définit $h = f + g = x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-2}$.
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R} \setminus \{2\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$

4.2 Produit de fonctions

Le produit des fonctions f et g est la fonction p définie par :

$$p = f \times g \quad : \quad x \mapsto p(x) = (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

Domaine de définition :

On calcule séparément $f(x)$ et $g(x)$ donc x doit appartenir aux deux domaines de définition :

$$\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

Cette opération est :

- commutative : $(f \times g) = (g \times f)$
- associative : $f \times (g \times h) = (f \times g) \times h = f \times g \times h$

Remarque 1.2
La multiplication d'une fonction par une constante est un cas particulier du produit de fonction :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad : \quad \lambda f : x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$

Exemple 1.15
Pour les deux fonctions f et g précédentes, on définit $j = f \times g = x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$.
$\mathcal{D}_j = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R} \setminus \{2\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$

4.3 Quotient de fonctions

Le quotient de f par g est la fonction q définie par :

$$q = \frac{f}{g} \quad : \quad x \mapsto q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Domaine de définition :

x doit appartenir aux domaines de définition des deux fonctions f et g, mais il faut en plus que $g(x)$ ne s'annule pas :

$$\mathcal{D}_q = \{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \ ; \ g(x) \neq 0\}$$

Cette opération n'est à priori ni commutative $\left(\dfrac{f}{g} \neq \dfrac{g}{f}\right)$ ni associative $\left(\dfrac{\frac{f}{g}}{h} \neq \dfrac{f}{\frac{g}{h}}\right)$.

Exemple 1.16
Soient les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ *définie sur* $\mathcal{D}_1 = [1\ ;\ +\infty[$ *et* $g : x \mapsto x - 3$ *définie sur* $\mathbb{R}$.
La fonction $\dfrac{f}{g}$ *est la fonction qui à* x *associe* $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$, *et son domaine de définition est* $[1\ ;\ +\infty[\setminus\{3\} = [1\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty[$

4.4 Composition de fonctions

On définit la fonction composition "f puis g", notée $g \circ f$ ("g rond f") par :

$$g \circ f \quad : \quad x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Soit en détaillant :

$$x \overset{f}{\mapsto} y = f(x) \overset{g}{\mapsto} z = g(y) = g \circ f(x)$$

Domaine de définition :

La détermination de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{g \circ f}$ de la fonction composée est plus délicat que pour l'addition et la multiplication.
Comme on commence par appliquer la fonction f, les valeurs de x qui sont permises doivent bien évidemment appartement à $\mathcal{D}_f$.
En deuxième lieu on applique la fonction g à $f(x)$. Il faut donc que $f(x)$ appartienne à $\mathcal{D}_g$.
$\mathcal{D}_{g \circ f}$ est donc "l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}_f$ tel que leur image par f appartient à $\mathcal{D}_g$", ce qui s'écrit :

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \quad ; \quad f(x) \in \mathcal{D}_g\}$$

La composition de fonction :

- est associative : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$
- **n'est pas commutative** : $g \circ f \neq f \circ g$

Exemple 1.17

1. *$f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 3x+1$*
   - *Domaine de définition de $g \circ f$:*
     $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ donc il n'y a aucune restriction : $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}}$.
   - *Détermination de $g \circ f$:*

$$x \overset{f}{\mapsto} x^2 \overset{g}{\mapsto} 3x^2+1 \quad : \quad \boxed{g \circ f : x \mapsto g \circ f(x) = 3x^2+1}$$

2. *$f : x \mapsto 3x+4$ et $g : y \mapsto \dfrac{1}{y}$*
   - *Domaine de définition de $g \circ f$:*
     $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.

     Il faut $x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g \Longrightarrow 3x+4 \neq 0$, donc $\boxed{\mathcal{D}g \circ f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}}$
   - *Détermination de $g \circ f$:*

$$x \overset{f}{\mapsto} 3x+4 \overset{g}{\mapsto} \frac{1}{3x+4} \quad : \quad \boxed{g \circ f : x \mapsto g \circ f(x) = \frac{1}{3x+4}}$$

3. *$f : x \mapsto -x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$*
   - *Domaine de définition de $g \circ f$:*
     $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+$.
     Il faut $x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g \Longrightarrow -x \geqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant 0$, donc $\boxed{\mathcal{D}g \circ f = \mathbb{R}_-}$
   - *Détermination de $g \circ f$:*

$$x \overset{f}{\mapsto} -x \overset{g}{\mapsto} \sqrt{-x} \quad : \quad \boxed{g \circ f : x \mapsto g \circ f(x) = \sqrt{-x}}$$

Remarque 1.3
Il est important de bien procéder de la manière précédente pour déterminer le domaine de définition. Il ne faut pas se contenter de déterminer l'ensemble de définition à partir de l'expression de $g \circ f$, car dans certains cas on n'obtient pas la même chose.
Par exemple, considérons les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2$.
On calcule $g \circ f(x) : x \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
Si l'on se contente de regarder cette expression de $g \circ f(x)$, on est tenté de conclure que $\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}$.
Or pour appliquer la fonction f il faut $x \in \mathbb{R}_+$...

5 Fonction réciproque

5.1 Introduction

La fonction réciproque d'une fonction f, noté f^{-1} est la fonction qui permet d'"annuler" l'effet de f. C'est-à-dire que si l'on applique f^{-1} à $f(x)$, on retombe sur x.

Intéressons nous par exemple au thermomètre à résistance de Platine. Ce thermomètre est en fait une tige métallique dont la résistance varie en fonction de la température suivant une loi affine :

$$R : T \mapsto R(T) = aT + b$$

où a et b sont des coefficients dont les valeurs sont tabulées.

Si l'on veut connaitre la température à partir de la mesure de résistance, il faut trouver une fonction qui, s'appliquant à R, permette de retomber sur T. Cette fonction serait alors la fonction inverse de la fonction R.

5.2 Fonction bijective

Définition

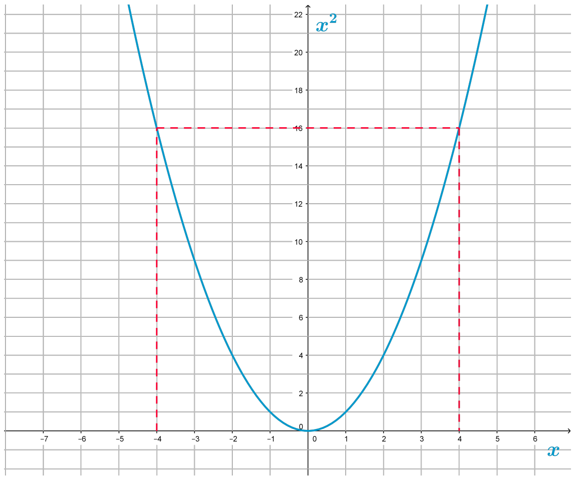
> Une fonction $f : E \to F$ est dite **bijective** si **tout** élément de F est l'image d'**un seul** élément de E.

Graphiquement, pour tout réel de F la droite d'équation $y = y_0$ coupe la courbe représentative de f en un seul point.

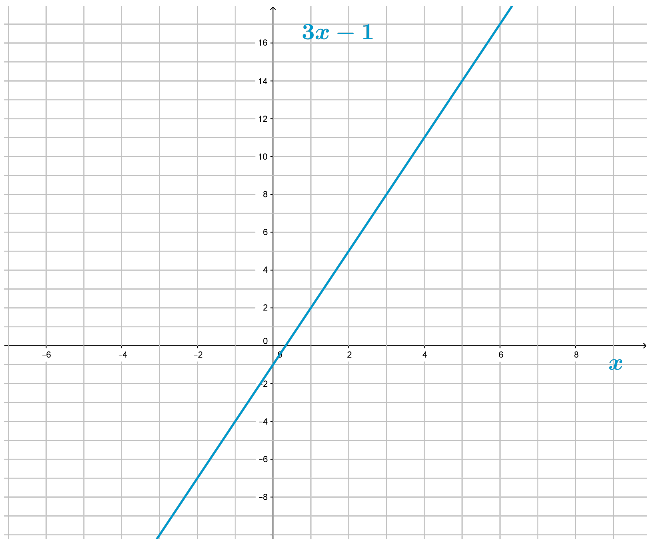
Exemple 1.18

Voici deux exemples :

La fonction $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *n'est pas bijective car chaque élément y de $\mathbb{R}_+$ a deux antécédents par f : $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.*



Par contre la fonction $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x-1 \end{array}$ *est bijective.*



Propriété :

> Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et strictement monotone sur $]a\ ;\ b[$ alors f est une bijection de $[a\ ;\ b]$ sur $[f(a)\ ;\ f(b)]$ ou $[f(b)\ ;\ f(a)]$.
>
> On pourra utiliser cette propriété pour montrer la bijectivité d'une fonction.

Exemple 1.19

- *Fonction affine :*

  $\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ *: f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*

- *Fonction valeur absolue :*
  $\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$ *: f_2 n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$: elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.*
  Ce n'est donc pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

5.3 Définition de la fonction réciproque

Soit f une fonction **bijective** de E vers F :

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

On démontre qu'il existe une fonction de F vers E, elle-même bijective, appelée **fonction réciproque** et notée f^{-1} définie par :

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} : & F & \to & E \\ & y = f(x) & \mapsto & x \end{array}$$

On a donc $f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$.

Exemple 1.20
Soit la fonction $\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ *:*

- *f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*
- *Soit y tel que $y = f(x)$. On cherche à exprimer x en fonction de y :*

$$y = 2x + 1 \Longrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Donc $\begin{array}{rccc} f_1^{-1} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \dfrac{y-1}{2} \end{array}$

Soit la fonction $\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$ *:*

- *f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*
- *Soit y tel que $y = f(x)$. On cherche à exprimer x en fonction de y :*

$$y = x^3 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

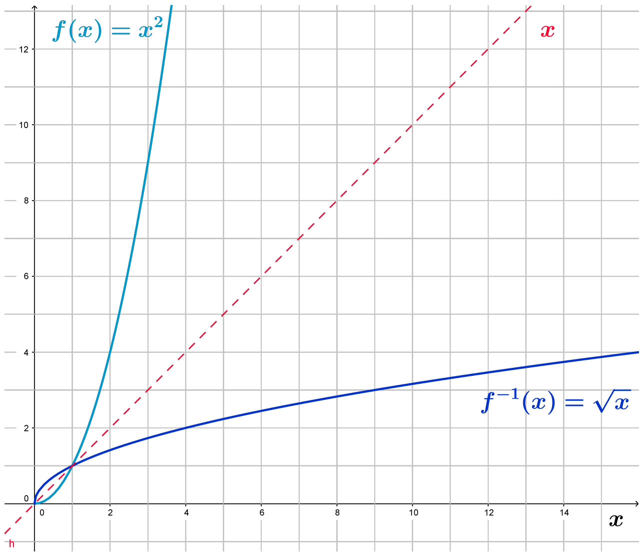
Donc $\begin{array}{rccc} f_2^{-1} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$

5.4 Propriétés de la fonction réciproque

1. f^{-1} est monotone et de même sens de variation que f.

2. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 1.21
Fonction $f(x) = x^2$ et sa récipirse $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$:



6 Limites et continuité

6.1 Définition de la limite d'une fonction

La notion de limite est assez intuitive : dire que la fonction f a comme limite le nombre l quand x tend vers a signifie que si x se rapproche très près de a, alors $f(x)$ se rapproche très près de l, ou encore qu'on peut obtenir $f(x)$ aussi près de l que l'on veut, à condition que x soit suffisamment proche de a.
On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

Cette notion s'étend aux limites infinies ou aux limites en l'infini.

6.1.1 Limite finie en l'infini

Si tout intervalle ouvert contenant le réel l contient toutes les valeurs de de $f(x)$ dès que x est assez grand, alors $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Dans ce cas, la droite horizontale d'équation $y = l$ est l'asymptote de la courbe représentative de f en $+\infty$.

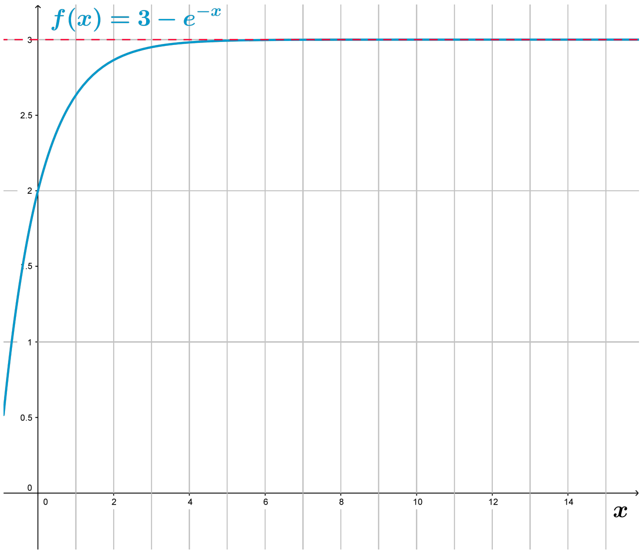
De même si tout intervalle ouvert contenant le réel l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez petit, alors $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Dans ce cas, la droite d'équation $y = l$ est l'asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Exemple 1.22

$$f : x \mapsto 3 - e^{-x} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$



6.1.2 Limite infinie en l'infini

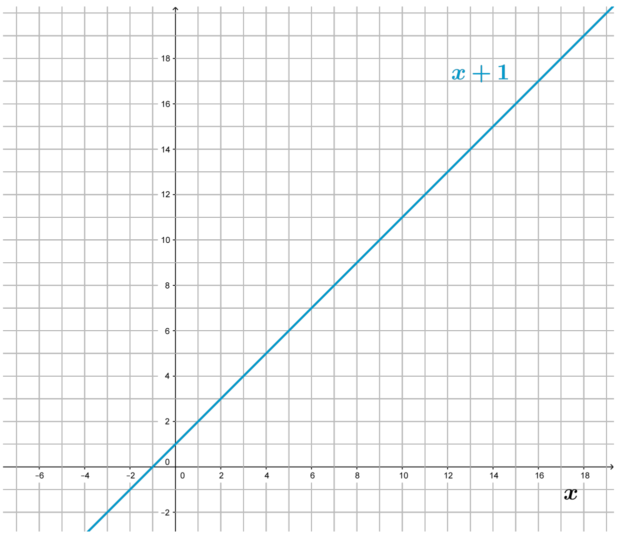
Si tout intervalle ouvert du type $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

On a des définitions similaires pour $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 1.23

$$f : x \mapsto x + 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



6.1.3 Limite infinie en un point

Soit une fonction f définie sur un intervalle I éventuellement privé de a.
Si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

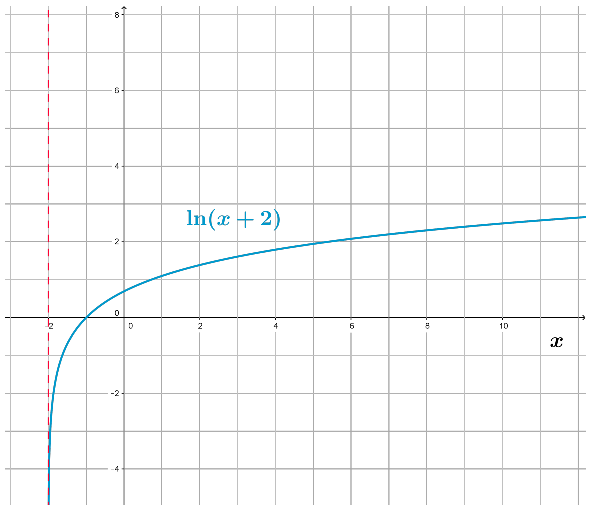
De même si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Dans ces deux cas, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de la fonction.

Exemple 1.24

$$f : x \mapsto \ln(x+2) \qquad \lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$$



6.1.4 Limite finie en un point

Soit une fonction f définie sur un intervalle I éventuellement privé de a.
Si tout intervalle fini contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a, alors $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

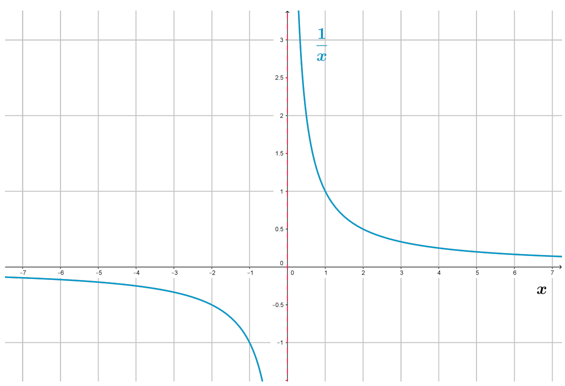
Dans le cas où f est définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} = f(a)$

6.2 Limites à gauche et à droite

Il se peut que la limite de la fonction f en a ne soit pas définie, mais que l'on puisse définir une limite quand x tend vers a par valeurs supérieures à a, et quand x tend vers a par valeurs inférieures à a. On parle alors respectivement de :

- **limite par valeurs supérieures** ou de **limite à droite** et on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.
- **limite par valeurs inférieures** ou de **limite à gauche** et on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

Exemple 1.25
Pour la fonction inverse : la limite en 0 n'est pas définie, mais on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$



6.3 Convergence et divergence

- Lorsque la limite est **finie** en a (ou en $\pm\infty$), on dit que la fonction **converge**.
- Lorsque la limite est **infinie** en a (ou en $\pm\infty$) ou **n'existe pas**, on dit que la fonction **diverge**.

6.4 Calcul de limites

6.4.1 Limites simples

- Les limites sont évidentes lorsque la fonction est définie et continue au point auquel on cherche la limite : si f est définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Les limites des fonction usuelles sur leurs ensembles de définition sont à connaître.
  Notez que ces limites peuvent être faciles à retenir si vous avez en tête l'allure de la courbe représentative de la fonction.

6.4.2 Opérations sur les limites

Somme de deux fonctions : $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	non définie
$-\infty$	$-\infty$	non définie	$-\infty$

Produit de deux fonctions : $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l>0$	$l<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l'>0$	$l\times l'$	$l\times l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l'<0$	$l\times l'$	$l\times l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	non définie	non définie
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	non définie	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	non définie	$-\infty$	$+\infty$

Quotient de deux fonctions : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l>0$	$l<0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$l'>0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\dfrac{l}{l'}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$l'<0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\dfrac{l}{l'}$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	non définie	non définie	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	non définie	non définie	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	non définie	non définie
$-\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	non définie	non définie

Ces tableaux font apparaître des cas où l'on ne connaît pas la limite. On parle de "forme indéterminée". Il s'agit des cas "$0 \times \infty$" , "$\frac{0}{0}$" , "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$+\infty - \infty$".
Attention, cette notation n'est par rigoureuse et ne doit pas être écrite dans une copie ! ...

Ces indéterminations peuvent parfois être levées grâce aux différentes techniques que nos présenterons plus loin.

6.4.3 Limites particulières à connaître

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Pour tout entier naturel n :

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln(x)} = +\infty$

6.5 Méthodes pour lever les indéterminations

6.5.1 Quotients de polynômes :

Soit une fonction $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m}$

- Au voisinage de $\pm\infty$, on assimile chaque polynôme à son monôme de plus haut degré non nul, et la limite est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

  On sait calculer cette limite.
- Au voisinage de 0, on assimile chaque polynôme à son monôme de plus bas degré non nul, et la limite est la limite du quotient de ses termes de plus bas degré.
  On sait calculer cette limite.

Exemple 1.26

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x-3x^3}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x-3x^3}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-3x^3}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{-6} = -\dfrac{1}{6}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1-1/x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

6.5.2 Mettre le terme prépondérant en facteur :

Cette méthode peut être utilisée pour les indéterminations du type "$+\infty - \infty$".

Soit par exemple à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+x} - x)$.
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$+\infty - \infty$". On met le terme prépondérant sous la racine en facteur :

$$\sqrt{4x^2+x} - x = \sqrt{4x^2(1+\frac{1}{4x})} - x = |2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x}} - x$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+x} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x}} - x\right)$.

Comme x tend vers $+\infty$, $|2x| = 2x$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x(2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1) = +\infty$$

6.5.3 Factorisation et simplification :

La méthode de factorisation peut être utilisée pour lever les indéterminations du type "$\frac{0}{0}$".
Elle consiste à trouver une racine commune au numérateur et au dénominateur et à simplifier la fraction.

Exemple 1.27

- *On veut calculer* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$.

  On a $\lim\limits_{x\to2}(x^2-5x+6) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to2}(x^2-6x+8)$, *donc il s'agit d'une forme indéterminée.*
  Le calcul de ces deux limites montre que 2 *est une racine des deux polynômes, donc qu'ils sont factorisables par* $(x-2)$.
  Les factorisations donnent $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ *et* $x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$.
  Donc $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x-4} = \dfrac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} x+2 = 4$

6.5.4 Règle de l'Hospital

Cette méthode permet de lever les indéterminations du type "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$". Cette règle énonce que **dans le cas de ces deux types d'indéterminations** :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dans le cas où ce ne serait pas suffisant, on peut appliquer une nouvelle fois la règle et passer aux dérivées secondes.

Exemple 1.28
Soit à calculer $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}$.
Il s'agit d'une indétermination du type "$\frac{0}{0}$".
L'utilisation de la règle de l'Hospital donne :

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-8x+16}{x^2-16} = \lim_{x\to4}\frac{(x^2-8x+16)'}{(x^2-16)'} = \lim_{x\to4}\frac{2x-8}{2x} = 0$$

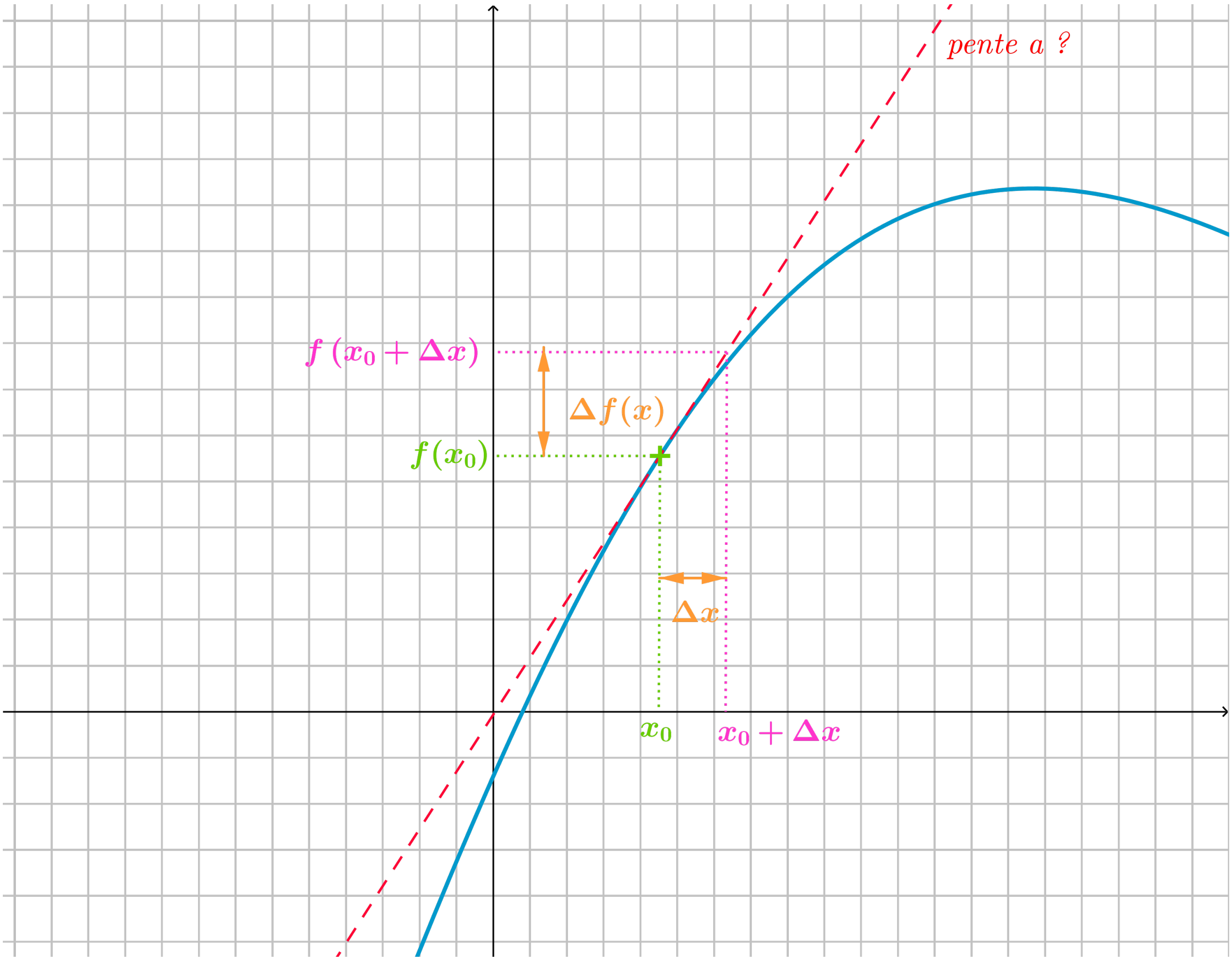
7 Dérivation

7.1 Introduction

Une fonction permet d'associer à un nombre x un autre nombre, noté $f(x)$, suivant un "calcul" donné. Nous nous posons maintenant la question suivante : si le nombre x varie d'une certaine valeur Δx, de combien varie le nombre $f(x)$?

Localement, la pente a d'une fonction au point d'abscisse x_0 peut être approchée par la pente de sa tangente :

$$a \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Cette pente traduit la variation $\Delta f(x)$ du nombre $f(x)$ résultant d'une variation Δx de x :

$$\Delta f(x) = a \times \Delta x$$

Pour avoir la "vraie" valeur de la pente, il faut faire tendre Δx vers 0 :

$$a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

7.2 Nombre dérivé

On appelle **nombre dérivé de la fonction f en a** le nombre :

$$f'(a) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}$$

On utilisera également la notation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}$$

Il faut bien sûr que ce nombre existe !
On dit que la fonction f est **dérivable** en a si le nombre précédent existe.
On dit que f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Le nombre $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en** a.
L'équation de cette tangente est alors :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

7.3 Fonction dérivée

7.3.1 définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
La fonction dérivée de la fonction f est la fonction f', notée aussi $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, définie sur I, qui a tout x associe le nombre dérivé en x :

$$f' : x \mapsto f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

Si la fonction f' est elle même dérivable, on peut calculer la dérivée seconde, qui est la dérivée de f' :

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Cette opération peut se répéter tant que la fonction obtenue est dérivable.
On appelle **dérivée $\mathbf{n-}$ieme** de la fonction f, et on la note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en faisant n dérivations successives.

7.3.2 Notation différentielle

La notation différentielle est une manière de noter la dérivée, qui traduit très bien la notion de variation développée dans l'introduction.

Soit une fonction $f : x \mapsto f(x)$.
Si x varie d'une quantité infinitésimale $\mathrm{d}x$, alors $f(x)$ varie d'une quantité infinitésimale $\mathrm{d}f(x)$ donnée par :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

En sciences, on n'utilise pratiquement que la notation différentielle, et il est indispensable que vous appreniez à l'utiliser.

7.3.3 Dérivées successives

On peut définir de même les dérivées successives :

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f^{(n-1)}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}
\end{aligned}
$$

7.4 Dérivées des fonctions usuelles

Domaine de définition de f	$f(x)$	**Domaine de dérivabilité**	$f'(x)$	**Remarques / Exemples**
$\mathbb{R}$ si $\alpha \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \leq -1$	x^α ; $\alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \leq -1$	$\alpha \times x^{\alpha-1}$	Exemples $f(x)$ → $f'(x)$ x^3 → $3x^2$ $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ → $-4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$ $\sqrt{x} = x^{1/2}$ → $\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}_+$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	Cas particulier de x^α avec $\alpha \in \mathbb{Z}_-$
$\mathbb{R}$	$k = cste$	$\mathbb{R}$	0	Cas particulier de x^α avec $\alpha = 0$
$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	Cas particulier de x^α avec $\alpha = \frac{1}{2}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	Cas particulier de x^α avec $\alpha = -\frac{1}{2}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	
$\mathbb{R}_+^*$	$\log_a x$; $a > 0$ $a \neq 1$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x \ln a}$	La dérivée se déduit de la relation $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x	
$\mathbb{R}$	a^x ; $a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\ln a \times a^x$	La dérivée se déduit de la relation $a^x = e^{x \ln a}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	
$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	
$[-1 \ ; \ 1]$	$\arccos x$	$]-1 \ ; \ 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$[-1 \ ; \ 1]$	$\arcsin x$	$]-1 \ ; \ 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\mathbb{R}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	
$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	
$\mathbb{R}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	
$[1 \ ; \ +\infty[$	$\operatorname{argch} x$	$]1 \ ; \ +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\mathbb{R}$	$\operatorname{argsh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$]1 \ ; \ 1[$	$\operatorname{argth} x$	$]1 \ ; \ 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$	

7.5 Dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur les intervalles $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$, et dérivables sur les intervalles I_u et I_v.
On note u' et v' leur dérivées.

Domaine de définition de f	$f(x)$	**Domaine de dérivabilité**	$f'(x)$	**Remarques / exemple**
$\mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v$	$u(x)+v(x)$	$I_u \cap I_v$	$u'(x)+v'(x)$	
$\mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v$	$u(x)\times v(x)$	$I_u \cap I_v$	$u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$	Exemples $f(x)$: $x^2\cos x$; $f'(x)$: $2x\cos x - x^2\sin x$
$\mathcal{D}_u$	$a\times u(x)\ ;\ a\in\mathbb{R}$	I_u	$a\times u'(x)$	C'est un cas particulier du cas précédent avec $v(x)=a=$ *cste* Exemples $f(x)$: $3x^2$; $f'(x)$: $3\times 2x = 6x$ $f(x)$: $\dfrac{3}{x^4}$; $f'(x)$: $-\dfrac{12}{x^3}$
$\mathcal{D}_u$	$[u(x)]^n$	I_u	$n\times u'(x)\times[u(x)]^{n-1}$	$f(x)$: $\sin^3 x$; $f'(x)$: $3\cos x\sin^2 x$ $f(x)$: $(x^2+x)^3$; $f'(x)$: $3(2x+1)(x^2+x)^2$
$\mathcal{D}_u \setminus \{x\ ;\ u(x)=0\}$	$\dfrac{1}{[u(x)]^n}\ ;\ n\in\mathbb{N}$	$I_u \setminus \{x\ ;\ u(x)=0\}$	$-n\times\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$	C'est la même relation que précédemment avec $\dfrac{1}{[u(x)]^n}=[u(x)]^{-n}$ et $-n\times\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^{n+1}}=-n\times u'(x)\times[u(x)]^{-n-1}$. Seul le domaine de définition change.
$\mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v \setminus \{x\ ;\ v(x)=0\}$	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$I_u \cap I_v \setminus \{x\ ;\ v(x)=0\}$	$\dfrac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2}$	On peut aussi le voir comme le produit $u(x)\times\dfrac{1}{v(x)}$. $f(x)$: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $f'(x)$: $\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $f(x)$: $\dfrac{\ln x}{x}$; $f'(x)$: $\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$
$\mathcal{D}_{u\circ v}$	$u\circ v(x) = u(v(x))$		$v'(x)\times\left[u'\circ v(x)\right] = v'(x)\times u'(v(x))$	$f(x)$: $\cos(x^2)$; $f'(x)$: $2x\times(-\sin(x^2)) = -2x\sin x^2$ $f(x)$: $e^{\cos x}$; $f'(x)$: $-\sin x e^{\cos x}$ $f(x)$: $\cosh(\ln x)$; $f'(x)$: $\dfrac{1}{x}\sinh(\ln x)$
$\left\{x\ ;\ \dfrac{x}{a}\in\mathcal{D}_u\right\}$	$u(ax)\ ;\ a\in\mathbb{R}$		$au'(ax)$	C'est un cas particulier du cas précédent avec $v(x)=ax$. $f(x)$: $\cos(3x)$; $f'(x)$: $-3\sin x$ $f(x)$: e^{4x} ; $f'(x)$: $4e^{4x}$ $f(x)$: $\ln(5x)$; $f'(x)$: $\dfrac{5}{5x}=\dfrac{1}{x}$

7.6 Interprétations de la dérivée d'une fonction

On a déjà dit que la dérivée d'une fonction en un point a est le coefficient directeur de la tangente en ce point.

La détermination de la dérivée permet ainsi de déterminer le sens de variation de la fonction :

- $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in I \implies f$ est croissante sur I
  $f'(x) > 0 \; \forall x \in I \implies f$ est strictement croissante sur I
- $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in I \implies f$ est décroissante sur I $f'(x) < 0 \; \forall x \in I \implies f$ est strictement décroissante sur I
- Un changement de variation d'une fonction se traduit par un changement de signe de la dérivée :

$$x_0 \text{ est un extremum (minimum ou maximum) de la courbe}$$
$$\iff f'(x_0) = 0 \text{ et } f'(x) \text{ change de signe en } x_0$$

  La tangente à la courbe en ce point est alors une droite horizontale.
  La nature de l'extremum est donné par la dérivée seconde :

$$f''(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ est un minumum}$$
$$f''(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ est un maximum}$$

La dérivée traduit donc les variations de la fonction.
Si x varie d'une quantité infinitésimale δx autour d'une valeur x_0, alors le nombre $f(x_0)$ varie d'une quantité infinitésimale $\delta f(x) = f'(x_0) \times \delta x$:

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\delta x}_{\delta f(x)}$$

Par exemple :

- La vitesse d'un objet en mouvement est la dérivée de sa position par rapport au temps ;
- L'accélération d'un objet en mouvement est la dérivée de sa vitesse par rapport au temps ;
- La vitesse de réaction d'une transformation chimique est la dérivée de la concentration d'un des produits par rapport au temps ;
- etc...

Cette interprétation de la dérivée est très importante dans la détermination des incertitudes.
Considérons par exemple le calcul des pertes par effet Joule dans une résistance R.
La puissance des ces pertes est donnée par :

$$P = R \times I^2$$

où R est la valeur de la résistance et I l'intensité du courant la parcourant.

La valeur de la résistance étant connue, pour déterminer la valeur de P on procèdera à une mesure du courant I. Comme toute mesure, celle-ci sera entachée d'une incertitude : on mesurera $I = I_0 \pm \Delta I$.
Il en résultera donc une incertitude sur la valeur de P calculée.
Cette incertitude sera donnée par la relation :

$$\Delta P = P'(I_0) \times \Delta I \implies \Delta P = 2RI_0\Delta I$$

Exemple 1.29
Calculer avec son incertitude la puissance perdue par effet Joule dans une résistance de $(100 \pm 2)\ \Omega$ parcourue par un courant de $1,5\ A$.

8 Étude d'une fonction

Lorsque l'on étudie une fonction il faut :

- Déterminer son domaine de définition ;
- Déterminer les limites importantes (aux bornes de son intervalle de définition) ;
- Déterminer sa dérivée ;
- Construire un tableau de variation ;
- Éventuellement tracer sa représentation graphique (ou tout au moins une ébauche) en faisant apparaitre les valeurs remarquables.

9 Exercices du chapitre 1

Exercice 1.1
Écrire sous la forme “condensée” les ensembles suivants :

- Ensemble E_1 des multiples naturels de 3.
- Ensemble E_2 des nombres entiers relatifs impairs.
- Ensemble E_3 des entiers positifs qui s'écrivent avec trois chiffres.
- Ensemble E_4 des entiers négatifs.
- Ensemble E_5 des nombres positifs, exceptés les multiples de 5.
- Ensemble E_6 des points du plan situés au dessus de la droite d'équation $y = 2x$.
- Ensemble E_7 des points du plans situés sur le cercle de centre $(0\ ;\ 0)$ et de rayon 3.

Exercice 1.2
Soient les ensembles et intervalles suivants :

$F_1 = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$ $\quad F_3 = \{1\,;\,-1\,;\,5\}$ $\quad I_2 =]-2\,;\,2[$
$F_2 = \{-1\,;\,-2\,;\,-3\,;\,-4\}$ $\quad I_1 = [-2\,;\,2]$ $\quad I_3 =]0\,;\,1]$

Exprimer :

- $F_1 \cap F_2$
- $F_1 \cup F_2$
- $(F_1 \cup F_2) \setminus F_3$
- $I_1 \cup I_2$
- $I_1 \cap I_2$
- $I_1 \cap I_3$
- $I_1 \setminus I_3$
- $I_3 \cap F_1$

Exercice 1.3
Traduire sous la forme d'un ensemble les inégalités suivantes :

1. $x \in \mathbb{R}$ et $x > 3$
2. $x \in \mathbb{R}$ et $x - 2 \neq 0$
3. $y \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{y}{2} \in \mathbb{N}$
4. $a \in \mathbb{R}^*$ et $\dfrac{1}{a} > 4$
5. $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 \neq 9$
6. $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 - 1 \neq 0$

Exercice 1.4
Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{2-x}{x^2-5}$
2. $f_2(t) = \sqrt{3-t}$
3. $f_3(x) = \sqrt{(x-1)(x^2-9)}$
4. $f_4(t) = \sqrt{t^2-4}$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
6. $f_6(x) = \sqrt{|x^2-4|}$
7. $f_7(x) = \sqrt{1 - \dfrac{2}{x-3}}$
8. $f_8(x) = \sqrt{0,5 - \cos(x)}$
   Se restreindre à l'intervalle $x \in]-\pi, \pi]$

Exercice 1.5
Soit les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{3x-11}{x-4}$.
Déterminer leurs ensembles de définition et vérifier que pour tout réel $t \neq 2$ on a $f(t-2) = g(t+2)$.

Exercice 1.6
Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^3 - 6x$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2-2}$
3. $f_3(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^2}$
4. $f_4(x) = \sqrt{x-1}$
5. $f_5(x) = (x-1)^2$

Exercice 1.7
Pour chacune des fonctions f et g suivantes, déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$ en précisant leur ensemble de définition :

1. $f : x \mapsto x+1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
2. $f : t \mapsto \sqrt{-t}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g : y \mapsto \dfrac{1}{y}+1$.

Exercice 1.8
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur fonction réciproque si elle existe (en limitant éventuellement les ensembles de définition et d'arrivée de la fonction).

1. $\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2(x-1)+7 \end{array}$
2. $\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{2}\right\} & \to & \mathbb{R}^* \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{2(x-1)+7} \end{array}$
3. $\begin{array}{rccc} f_3 : & [2,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & (x-2)^2 \end{array}$
4. $\begin{array}{rccc} f_4 : & [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$
5. $\begin{array}{rccc} f_5 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$
6. $\begin{array}{rccc} f_6 : &]-\infty\,;\,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & (x-1)^4 \end{array}$

Exercice 1.9
Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1. $g_1 : x \mapsto -2x-6$
2. $g_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x-5}$
3. $g_3 : x \mapsto \dfrac{1}{3-x}$
4. $g_4 : x \mapsto \dfrac{x-3}{x^2-4}$
5. $g_5 : x \mapsto \sqrt{1-x}$
6. $g_6 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-6x+8}$

Exercice 1.10
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3+2x^2+7}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3+2x^2+7}{2x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+2x^2+7}{2x}$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+2x^2+7}{2x}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2+6}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2+6}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+3}{2x^3+6x^2+8}$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+3}{2x^3+6x^2+8}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

Exercice 1.11
Soit la fonction $x : t \mapsto x(t) = \dfrac{\sqrt{t+2}}{t^2-4t+4}$.

1. Déterminer le domaine de définition de x.
2. Montrer que la courbe représentative de x a une asymptote verticale et une asymptote horizontale dont vous donnerez les équations.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de x.

Exercice 1.12
Calculer les limites suivantes en utilisant l'une des méthodes permettant de lever les indéterminations :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-7}}{3x+5}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-7}}{3x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+6x+1}-x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x})$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Exercice 1.13
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto 3x^2+x-2$
2. $f_2 : y \mapsto \dfrac{1}{y-1}$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+2x-1}$
4. $f_4 : t \mapsto 3t\cos t$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-6}$
6. $f_6 : p \mapsto \dfrac{1}{p^5}$
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{(4x-5)^3}$
8. $f_8 : x \mapsto \sin(3x)$
9. $f_9 : x \mapsto \tan(x^2+1)$
10. $f_{10} : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
11. $f_{11} : x \mapsto \cos x \sin x$
12. $f_{12} : x \mapsto (x^5+4x^4)^2$
13. $f_{13} : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^2$
14. $f_{14} : x \mapsto \sin^4(2x)$
15. $f_{15} : x \mapsto \dfrac{\cos(4x)+1}{x^2-1}$

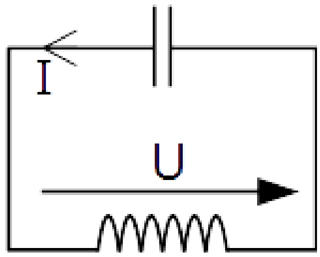
Exercice 1.14
Pour chacun des fonctions suivantes, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse a :

1. $f_1 : x \mapsto x^2 \quad ; \quad a=-1$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x} \quad ; \quad a=2$
3. $f_3 : x \mapsto \sin(2x) \quad ; \quad a=0$
4. $f_4 : x \mapsto 3x-\sqrt{x}+1 \quad ; \quad a=2$

Exercice 1.15
Soit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1)=2$ et $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Sans chercher à calculer de primitive, déterminer une valeur approchée de $f(1,1)$.

Exercice 1.16
En physique, quand on a une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C en série, la charge q portée par une armature du condensateur est données par $q=Cu$ où u est la tension aux bornes de chacun des composants.



On a de plus $u=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ où i est l'intensité du courant.
Montrer que l'on a $\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{1}{LC}q=0$.

Exercice 1.17
Dans le but de calculer son volume on a mesuré l'arrête d'un cube de 57 cm de côté en commettant une erreur égale à $0,05$ cm.

On note V le volume du cube calculé et ΔV l'erreur commise sur le calcul.

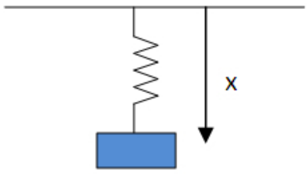
En admettant que l'on peut approximer ΔV par $\mathrm{d}V$, donner la valeur du volume avec son incertitude.

Exercice 1.18
Soit la fonction $x : t \mapsto 3t^3-3t^2-t$.
On cherche à résoudre l'équation $x(t)=9$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction x.
2. Étudier le signe de $x'(t)$.
3. Dresser le tableau de variation de x en faisant apparaître les valeurs des extrema et les limites.
4. Combien l'équation a-t-elle de solution ?
5. Procéder par tâtonnement afin de trouver une solution de l'équation à 0,01 près.

Exercice 1.19
Pour tout système physique, un état d'équilibre est un état dans lequel l'énergie est extrémale.
Un état d'équilibre est qualifié de stable si lorsque l'on s'écarte faiblement de cet état, le système évolue spontanément de manière à y revenir. Un état d'équilibre stable correspond à un minimum d'énergie.
Un état d'équilibre est qualifié d'instable si lorsque l'on s'écarte faiblement de cet état, le système évolue spontanément de manière à s'en éloigner davantage. Un état d'équilibre instable correspond à un maximum d'énergie.

On s'intéresse à une objet de masse m suspendu à un ressort de raideur $k > 0$. Il y a compétition entre le poids, qui tend à entraîner l'objet vers le bas et la force de rappel du ressort, qui est dirigée vers le haut et le retient.



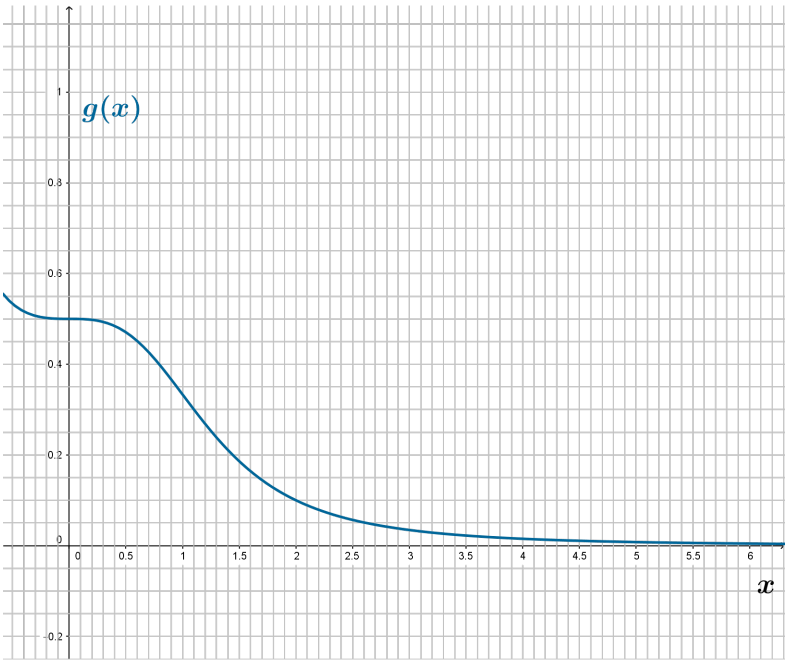
L'énergie potentielle de l'objet est alors donnée par :

$$E = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + E_0$$

où g est l'accélération de la pesanteur, E_0 une constante et x la position du ressort.

Déterminer la position d'équilibre stable de la masse pour $m = 1,3\ kg$ et $k = 35\ N/m^{-1}$.

Exercice 1.20
Soit la fonction g dont la courbe représentative est la suivante :



1. Déterminer graphiquement une valeur approchée de $g(3)$.
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée de $g'(1,5)$.
3. Quel est le signe de $g''(2)$?

Exercice 1.21
Cet exercice est inspiré d'un problème du cours de Thermique (Semestre 2). Vous pouvez essayer de directement répondre à la dernière question. La question 1 n'est là que pour vous guider.

On cherche à déterminer la température d'une ampoule de 60 W à fil de tungstène.
Un bilan de puissance permet d'obtenir l'équation suivante :

$$23T + 5,33.10^{-8}T^4 = 14774$$

La température du fusion du tungstène est d'environ 3000 K, et on prendra la température ambiante à 293 K.

1. **Questions préliminaires :**
   Soit la fonction $f(T) = 23T + 5,33.10^{-8}T^4 - 14774$.
   (a) Calculer $f(293)$ et $f(3000)$.
   (b) Déterminer la dérivée de f.
   (c) Montrer que f est strictement croissante sur $[293\ ;\ 3000]$.
   (d) En déduire que l'équation du bilan de puissance a une unique solution.
2. Procéder par itération afin de déterminer la température de l'ampoule au Kelvin près.

Exercice corrigé 1.1
Soit la fonction $h = y \mapsto h(y) = \sqrt{4y^2 - 12y + 9}$.
1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Montrer que la fonction h peut s'exprimer uniquement à l'aide de la fonction valeur absolue.

1. Il faut $4y^2 - 12y + 9 \geq 0 \Longrightarrow (2y-3)^2 \geq 0$, ce qui est vrai pour tout réel x.
   Donc $\boxed{\mathcal{D}_h = \mathbb{R}}$.
2. $h(y) = \sqrt{4y^2 - 12y + 9} = \sqrt{(2y-3)^2} \Longrightarrow \boxed{h(y) = |2y-3|}$

Exercice corrigé 1.2
Soit la réaction chimique suivante :

$$3BrO^- = BrO_3 + 2Br^-$$

On part d'une concentration c_0 en BrO^-, et alors la concentration $c(t)$ en BrO^- au cours du temps est donnée par :

$$\frac{1}{c(t)} = \frac{1}{c_0} + 3kt \quad \text{où } k \text{ est une constante}$$

1. Donner l'expression de $c(t)$.
2. Déterminer l'expression de l'instant t_0 au bout duquel la concentration en BrO^- a été divisée par 2.
   Faire l'application numérique avec $c_0 = 1\,mol/L$ et $k = 0,01\,L.mol^{-1}.s^{-1}$.
3. Cette réaction est-elle totale ?
   On rappelle qu'une réaction chimique est totale si tous les réactifs ont disparu à la fin de la réaction).
4. On réalise un premier mélange à l'instant $t = 0$, et un deuxième mélange à l'instant $t_1 = 10s$.
   (a) Donner l'expression de la concentration $c_2(t)$ en BrO^- dans le deuxième mélange.
   (b) Donner l'expression de c_2 en fonction de la concentration c_1 dans le premier mélange.

1. $\boxed{c(t) = \frac{c_0}{1 + 3kc_0t}}$.
2. t_0 est tel que $c(t_0) = \frac{c_0}{2} \Longrightarrow 1 + 3kc_0t_0 = 2 \Longrightarrow \boxed{t_0 = \frac{1}{3kc_0}}$.
   L'application numérique donne $\boxed{t_0 = 33,3\,s}$.
3. $\lim_{t \to +\infty} c(t) = 0$ donc <u>la réaction est totale</u>.
4. (a) $c_2(t) = c(t-10) = \frac{c_0}{1 + 3kc_0(t-10)} \Longrightarrow \boxed{c_2(t) = \frac{c_0}{1 - 30kc_0 + 3kc_0t}}$.
   (b) $\frac{1}{c_2(t)} = \frac{1}{c_0} + 3kt - 30k$ et $\frac{1}{c_1(t)} = \frac{1}{c_0} + 3kt$ donc $\frac{1}{c_2(t)} = \frac{1}{c_1(t)} - 30k \Longrightarrow \boxed{c_2(t) = \frac{c_1(t)}{1 - 30kc_1(t)}}$.

Exercice corrigé 1.3
Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x+3} - 1}$

1. Vérifier que $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{\sqrt{x+3} - 1}$.
2. Déterminer son ensemble de définition.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

1. $(x-2)(x-3) = x^2 - x - 6$ donc on a bien $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{\sqrt{x+3} - 1}$.
2. Il faut $x + 3 \geq 0$ et $\sqrt{x+3} - 1 \neq 0$, ce qui conduit à $\boxed{\mathcal{D}_f = [-3\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[}$.
3. • On doit calculer $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$:

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2} (\sqrt{x+3} - 1) = 0 \end{cases}$$

On a donc une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$".

• On multiplie par le binôme conjugué (ou alors on utilise la règle de l'Hospital : même résultat) :

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(\sqrt{x+3} - 1)} = \frac{(x+2)(x-3)(\sqrt{x+3}+1)}{(\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x+3}+1)} = \frac{(x+2)(x-3)(\sqrt{x+3}+1)}{x+3-1} = (x-3)(\sqrt{x+3}+1)$$

On calcule $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x-3)(\sqrt{x+3}+1) = -5 \times 2 \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -10}$.

Exercice corrigé 1.4
L'énergie E nécessaire à un poisson pour nager contre un courant de vitesse c dépend de sa propre vitesse v et de la distance d à parcourir.
On peut modéliser cette énergie par la relation :

$$E = \frac{av^3 d}{v - c}$$

où a est une constante.

Déterminer, la vitesse v pour laquelle l'énergie dépensée est minimale.

E est minimale si $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v} = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}v^2} > 0$.

• On commence par déterminer la ou les valeurs de v permettant $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v} = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v} = a\frac{3v^2 d(v-c) - v^3 d}{(v-c)^2} = \frac{av^2 d(2v - 3c)}{(v-c)^2}$$

Donc $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v} = 0 \Longrightarrow 2v - 3c = 0 \Longrightarrow v = \dfrac{3c}{2}$.

• Il faut ensuite vérifier que pour cette valeur on a bien $\dfrac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}v^2} > 0$:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v} = \frac{2adv(v^2 - 3cv + 3c^2)}{(v-c)^3}$$

On calcule $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v}\left(v = \dfrac{3c}{2}\right) = 18d > 0$

Donc l'énergie est minimale si $\boxed{v = \dfrac{3c}{d}}$

Exercice corrigé 1.5
Soient $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-2}$ et $g : x \mapsto x^2$.

1. Donner leurs ensembles de définition.
2. Déterminer $f \circ g$ et son ensemble de définition.
3. Déterminer $g \circ f$ et son ensemble de définition.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
2. $f \circ g : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 2}$ et $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2}\}$.
3. $g \circ f : x \mapsto \left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)^2$ et $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Exercice corrigé 1.6
Calculer :

1. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$
3. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 1}$
4. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 2} - 3}{x^3 - 1}$
5. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{x - \pi}$
6. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - 3x)$
7. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2X + 3} - x)$
8. $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3xe^x - x^2)$

1. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (Multiplier par $1 + \cos x$ au numérateur et au dénominateur).
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$ (Multiplier par la quantité conjuguée).
3. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 1} = \frac{4}{3}$ (Factoriser par $(x + 1)$).
4. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 2} - 3}{x^3 - 1} = \frac{4}{9}$
5. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{x - \pi} = 2$ (Poser $h = x - \pi$).
6. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - 3x) = -\infty$ (Factorisation).
7. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2X + 3} - x) = 1$ (Multiplication par la quantité conjuguée).
8. $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3xe^x - x^2) = -\infty$

Exercice corrigé 1.7
Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 1$.

La variable x est également donnée par une fonction : $x : y \mapsto \frac{1}{y}$.

1. Calculer $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.
2. En déduire $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(y)$ grâce à la formule du composition.
3. Déterminer l'expression de la fonction $g : t \mapsto f \circ x(t)$ et déterminer sa fonction dérivée. Comparer au résultat de la question précédente.

1.
   - $\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x + 3}$
   - $\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{y^2}}$
2. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (2x + 3)\left(-\frac{1}{y^2}\right) \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{y^2}\left(\frac{2}{y} + 3\right)}$
3.
   - $g(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{t} - 1 \Longrightarrow \boxed{g(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} - 1}$
   - $\boxed{g'(t) = -\frac{2}{t^3} - \frac{3}{t^2}}$
   - On obtient bien le même résultat qu'à la question précédente : $g'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$.

Exercice corrigé 1.8
Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$.

La fonction est définie sur $]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.
Sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x		$-$				$+$	
$\sqrt{x^2 - 1}$		$+$				$+$	
$f'(x)$		$-$				$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0^+		0^+	$\nearrow$	$+\infty$

Chapitre 2

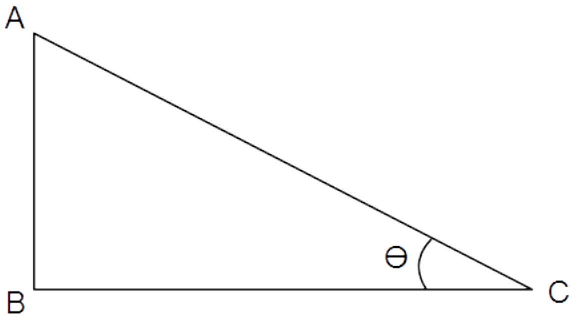
Fonctions usuelles

1 Fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente)

Les fonctions trigonométriques sont des fonctions dont la variable est un angle. Tous les résultats que l'on donne par la suite sont pour des angles exprimés en **radians** (qui est l'unité naturelle des angles !).
Le **sens trigonométrique** est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

1.1 Définition géométrique

Pour calculer le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle θ, on se place dans un triangle rectangle dont l'un des angles vaut θ.



Le sinus de θ est égal au rapport du côté opposé sur l'hypoténuse :

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

Le cosinus de θ est égal au rapport du côté adjacent sur l'hypoténuse :

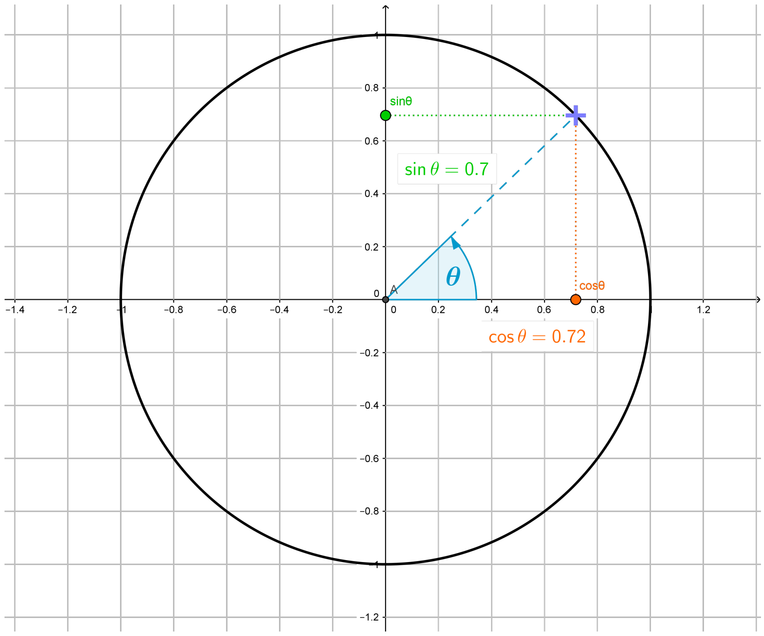
$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

La tangente de θ est égal au rapport du côté opposé sur le côté adjacent, ou encore le rapport du sinus sur le cosinus :

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

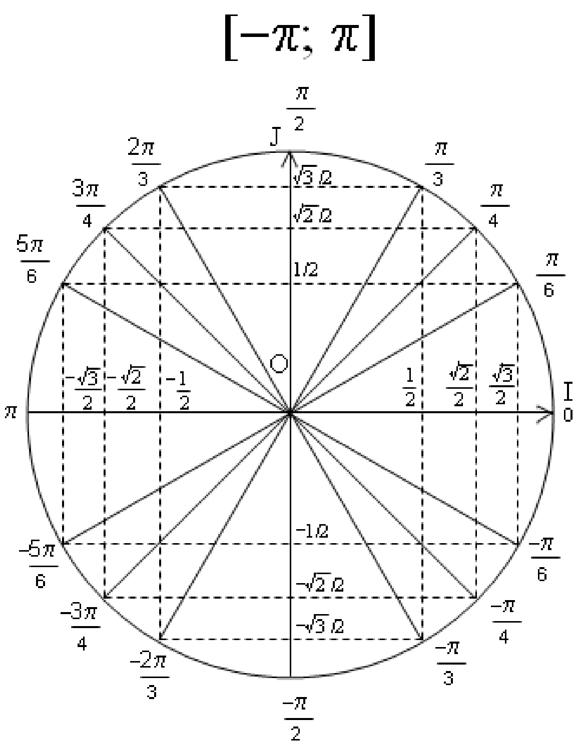
1.2 Cercle trigonométrique

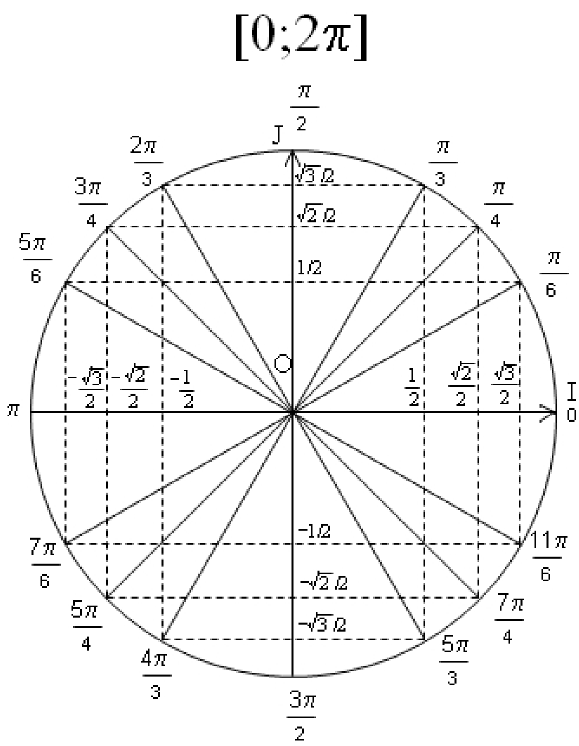
Le cercle trigonométrique est un **cercle de rayon** 1.
En parcourant le cercle, on peut y lire les valeurs de sinus et cosinus de l'angle entre l'axe horizontal et le point sur lequel on se situe :



Comme le rayon est de 1, pour chaque angle on a directement la valeur du sinus sur l'axe vertical et la valeur du cosinus sur l'axe horizontal.
Les angles sont **orientés** : il sont positifs si on les parcourt dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) et négatifs sinon.

Les valeurs des cosinus et sinus de quelques angles remarquables sont notés sur les cercles suivants :





1.3 Définitions et propriétés des fonctions trigonométriques

1.3.1 Définition

- Fonction sinus : $x \mapsto \sin x$
- Fonction cosinus : $x \mapsto \cos x$
- Fonction tangente : $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

1.3.2 Périodicité d'une fonction

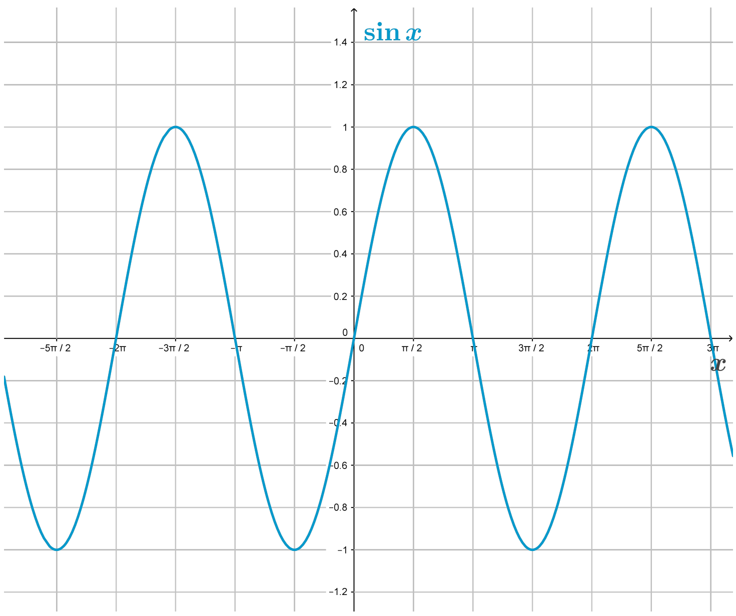
Une fonction $f : x \mapsto f(x)$ est périodique si elle se répète indéfiniment à l'identique à intervalles réguliers.
Le plus petit motif qui se répète est appelé **motif élémentaire**.
L'intervalle Δx correspondant à un motif élémentaire est appelé **période** de la fonction, et on la note généralement T. Cela signifie que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad : \quad f(x+T) = f(x)$$

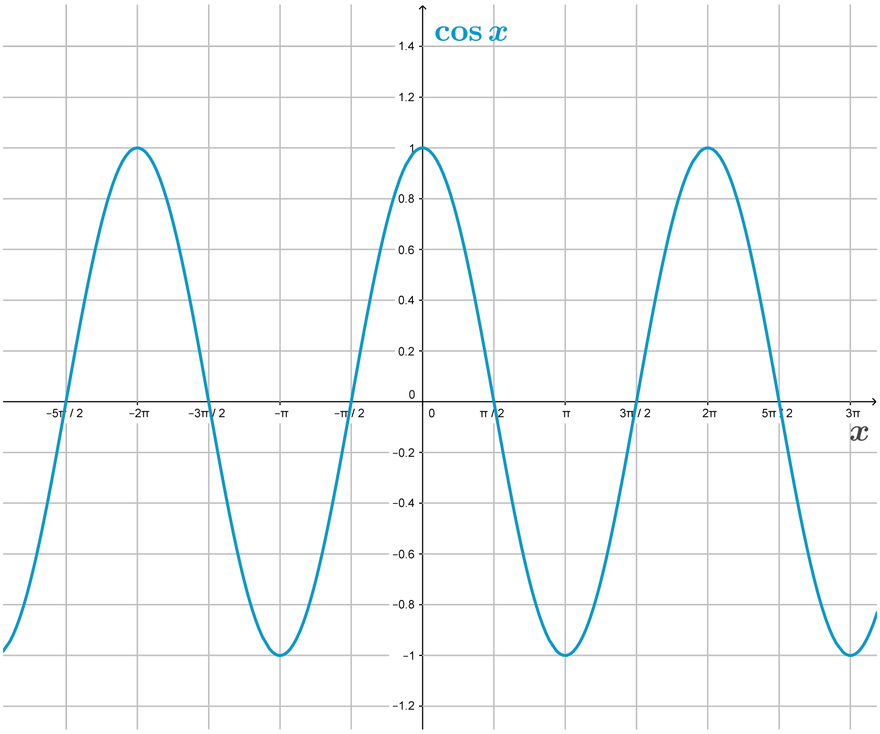
Les fonctions trigonométriques sont des fonctions périodiques puisqu'au minimum à chaque fois que l'on a parcouru un tour du cercle, on "revient au point de départ".

Toutes les fonctions périodiques sont des combinaisons des fonctions trigonométriques.

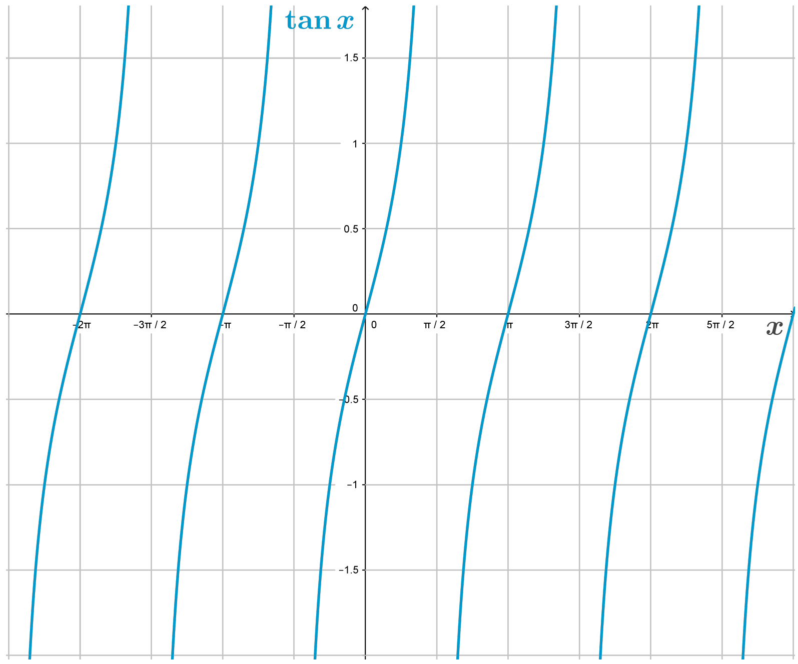
1.3.3 Fonction Sinus

Définition	$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1\ ;\ 1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$
Courbe représentative	
Périodicité	
Parité	
Dérivée	

1.3.4 Fonction Cosinus

Définition	$\begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1\,;\,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$
Courbe représentative	
Périodicité	
Parité	
Dérivée	

1.3.5 Fonction Tangente

<table>
<tr><td>Définition</td><td>$$\begin{array}{rcl} \tan : \quad \mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>Courbe représentative</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Périodicité</td><td></td></tr>
<tr><td>Parité</td><td></td></tr>
<tr><td>Dérivé</td><td></td></tr>
</table>

1.3.6 Utilisation des nombres complexes

Il peut parfois être intéressant d'utiliser les nombres complexes, notamment pour retrouver les relations trigonométriques *(voir formulaire)*. Pour rappel :

- $\cos x = \Re\left(e^{ix}\right)$
- $\sin x = \Im\left(e^{ix}\right)$
- $\tan x = \dfrac{\Im\left(e^{ix}\right)}{\Re\left(e^{ix}\right)}$

1.4 Relations trigonométriques

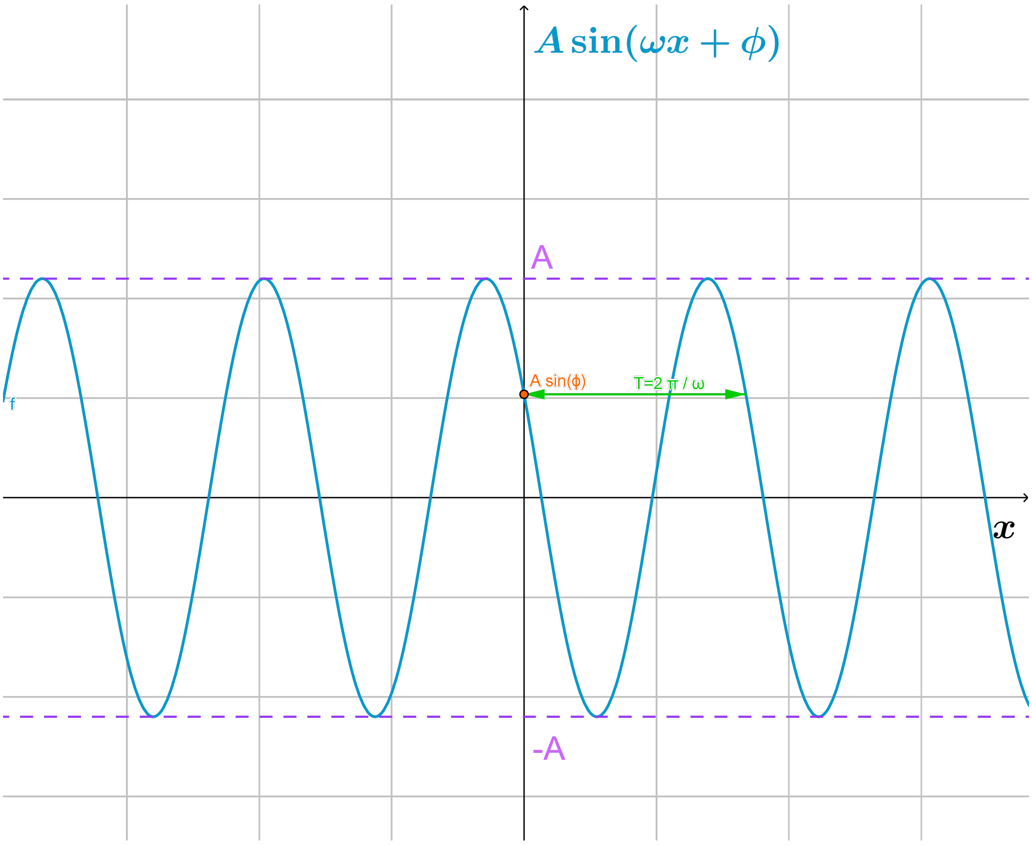
Ce sont les relations du formulaire. Vous devez savoir qu'elles existent et être capables de les retrouver grâce au cercle trigonométriques et/ou aux nombres complexes.
Celles qui sont faciles à retrouver grâce au cercle trigonométrique sont les suivantes :

$\cos(-a) = \cos(a)$	$\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin(a)$	$\cos(a - \frac{\pi}{2}) = \sin(a)$	$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$	$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$	$\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos(a)$	$\sin(a - \frac{\pi}{2}) = -\cos(a)$	$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$	$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\tan(-a) = -\tan(a)$	$\tan(a + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(a)}$	$\tan(a - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(a)}$	$\tan(\pi + a) = \tan(a)$	$\tan(\pi - a) = -\tan(a)$

1.5 Fonctions sinusoïdales

On appelle de manière générale **fonction sinusoïdale** toute fonction qui s'exprime comme un sinus ou un cosinus. La forme générale d'une fonction sinusoïdale est :

$$f : x \mapsto f(x) = A \sin(\omega t + \phi)$$



- A est la valeur maximale de la fonction.
- ϕ est la phase à l'origine
- ω est la pulsation. Elle est reliée à la période T par la relation :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

1.6 Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives ! Pour pouvoir définir des fonctions réciproques, il faut donc restreindre les fonctions trigonométriques à un intervalle sur lequel elles sont bijectives.

1.6.1 Fonction réciproque de la fonction sinus

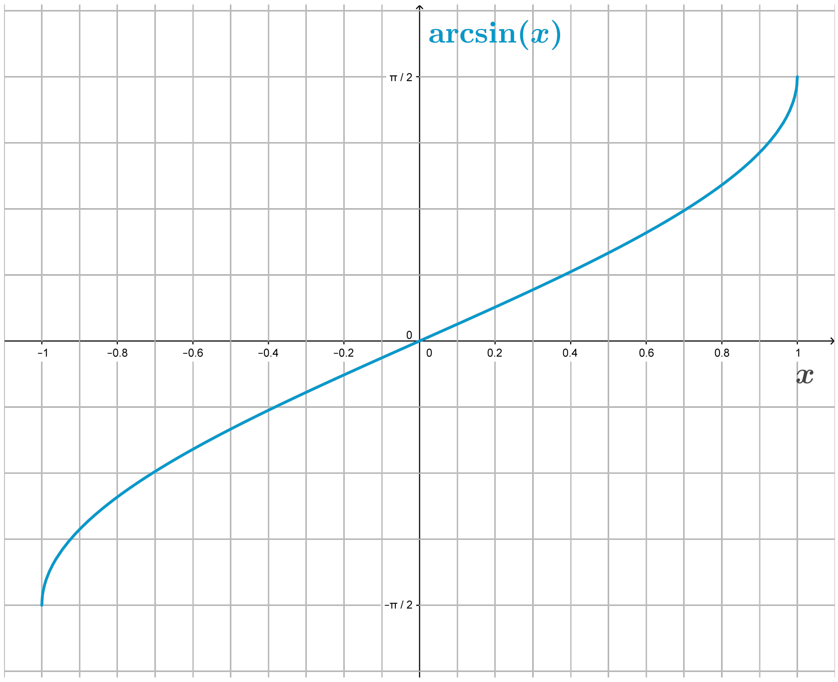
Définition et propriétés :

Pour définir la fonction arcsin, on restreint la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

<table>
<tr><td>Définition</td><td>

$$\begin{array}{rcccl} \arcsin : & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \\ & y & \longmapsto & x & \text{tel que} \quad y = \sin(x) \end{array}$$

</td></tr>
<tr><td>Courbe représentative</td><td>



</td></tr>
<tr><td>Parité</td><td></td></tr>
<tr><td>Dérivée</td><td>

$$\arcsin' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

</td></tr>
</table>

Fonction arcsin et calculatrice :

Attention à l'utilisation de la fonction arcsin de la calculatrice !

Imaginons par exemple qu'on ait à résoudre l'équation $\sin \alpha = 0.5$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

En utilisant le cercle trigonométrique on trouve deux solutions : $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$.

Si l'on tape $\arcsin 0,5$ à la calculatrice on n'obtient qu'une seule solution : $x = \frac{\pi}{6}$.
Il nous manque donc une solution !

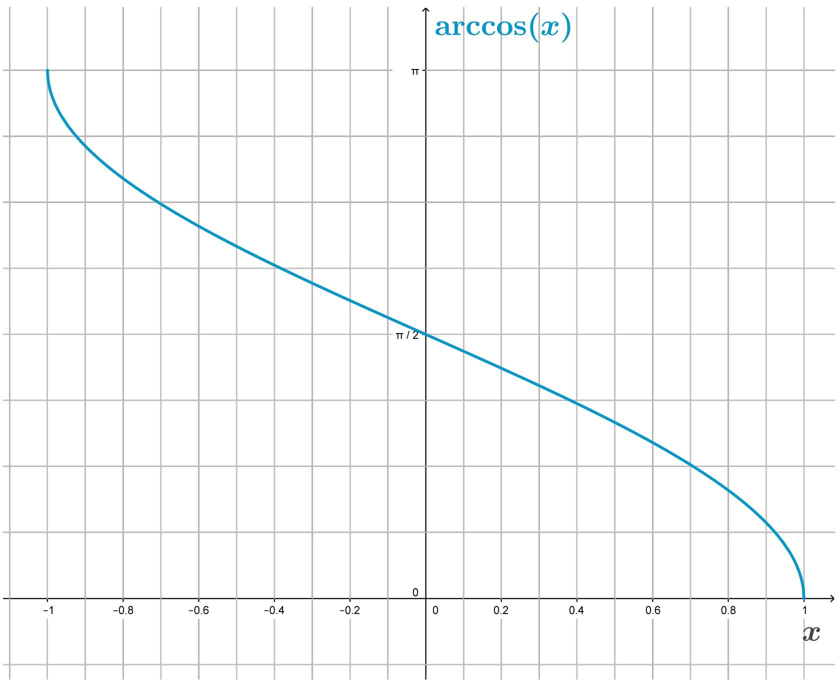
Lorsque vous demandez à votre calculatrice de calculer $\arcsin x$, elle vous affichera le résultat compris dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, par définition de la fonction arcsin.
Il faut toujours bien garder en tête que l'angle $-x + \pi$ est également solution !

$$y = \sin x \Longrightarrow x = \arcsin y \ [2\pi] \quad \underline{\text{ou}} \quad x = \pi - \arcsin y \ [2\pi]$$

1.6.2 Fonction réciproque de la fonction cosinus

Définition et propriétés :

Pour définir la fonction arccos, on restreint la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$.

Définition	$$\begin{array}{rrcll} \arccos : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] & \\ & y & \longmapsto & x & \text{tel que} \quad y = \cos(x) \end{array}$$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	$\arccos' : x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Fonction arccos **et calculatrice :**

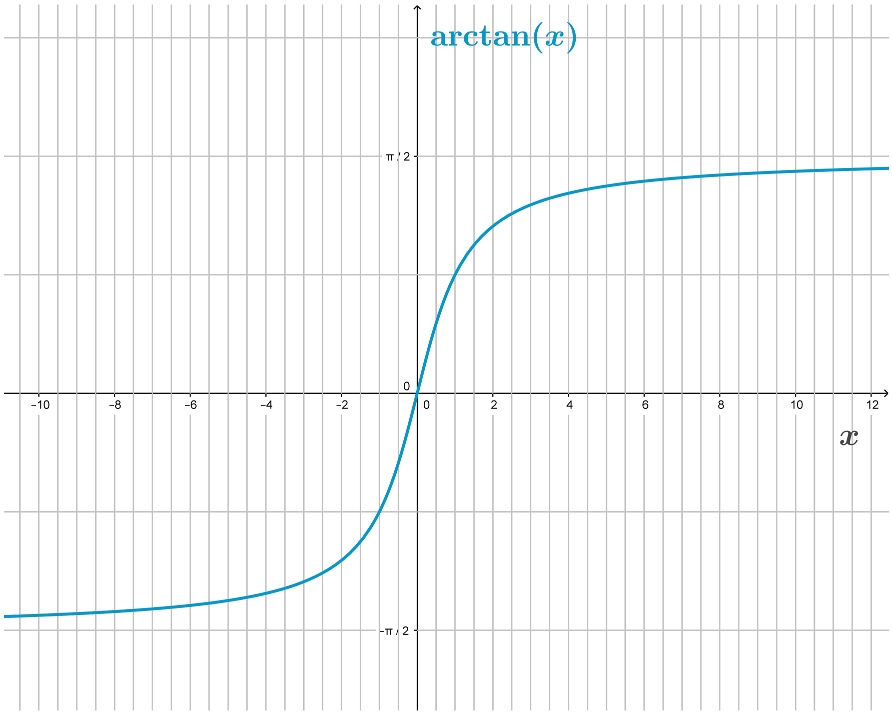
Attention à l'utilisation de la fonction arccos de la calculatrice !
Lorsque vous demandez à votre calculatrice de calculer $\arccos x$, elle vous affichera le résultat compris dans l'intervalle $[0, \pi]$, par définition de la fonction arccos.
Il faut toujours bien garder en tête que l'angle $-x$ est également solution !

$$y = \cos \Longrightarrow x = \arccos y\ [2\pi] \quad \underline{\text{ou}} \quad x = -\arccos y\ [2\pi]$$

1.6.3 Fonction réciproque de la fonction tangente

Définition et propriétés :

Pour définir la fonction arctan, on restreint la fonction sinus à l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

Définition	$\begin{array}{lccl} \arctan : &]-\infty,+\infty[& \longrightarrow &]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\\ & y & \longmapsto & x \text{ tel que } \quad y = \tan(x) \end{array}$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	$\arctan' : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

Fonction arctan et calculatrice :

Attention à l'utilisation de la fonction arctan de la calculatrice !
Lorsque vous demandez à votre calculatrice de calculer $\arctan x$, elle vous affichera le résultat compris dans l'intervalle $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, par définition de la fonction arctan.
Il faut toujours bien garder en tête que l'angle $x + \pi$ est également solution !

$$y = \tan x \Longrightarrow x = \arctan y \ [2\pi] \quad \underline{\text{ou}} \quad x = \pi + \arctan y \ [2\pi]$$

1.6.4 Égalités utiles

- $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1.7 Résolution d'équations trigonométriques

Lorsque l'on a à résoudre des équations trigonométriques il faut faire très attention :

- A la périodicité des ces fonctions
- A l'utilisation des fonctions trigonométriques réciproques

Exemple 2.1
On veut résoudre l'équation $\cos(2x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *sur* $\mathbb{R}$ *:*

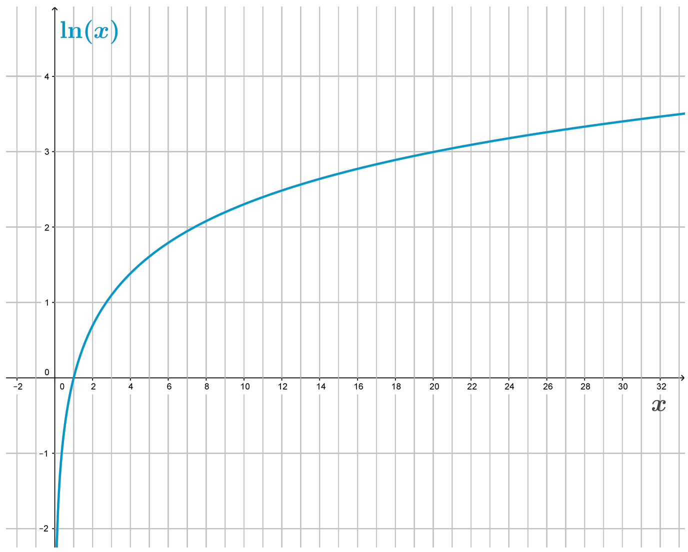
$$\begin{aligned} & \cos(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Longrightarrow \quad & 2x = \frac{\pi}{4}[2\pi] \quad ou \quad 2x = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \\ \Longrightarrow \quad & x = \frac{\pi}{8}[\pi] \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{8}[\pi] \end{aligned}$$

2 Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes

2.1 Fonctions logarithmes

2.1.1 Fonction logarithme népérien

Définition

Définition	La fonction logarithme népérien, notée ln ou plus rarement $\log_e$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$: $\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	

Propriétés

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{R}$:

- $\ln(1) =$
- $\ln(a \times b) =$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) =$
- $\lim_{a \to 0^+} \ln a =$
- $\ln(a^n) =$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$
- $\lim_{a \to +\infty} \ln a =$

2.1.2 Fonctions logarithmes généralisées

Définitions

Pour tout $a > 0$ et $a \neq 1$, on définit la fonction logarithmique de base a :

$$\begin{array}{rccl} \log_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

La fonction logarithme la plus courante est la fonction logarithme de base 10, que l'on note log plutôt que $\log_{10}$:

$$\begin{array}{rccl} \log_{10} : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \log_{10}(x) = \log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \\ & & & \text{tel que} \quad 10^y = x \end{array}$$

Propriétés

Les propriétés des fonctions $\log_a$ sont similaires à celles de ln :

$\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{R}$:

- $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

2.1.3 A propos des fonctions logarithme

Les logarithmes permettent de simplifier des calculs compliqués sur des grands nombres :

- En passant à des nombres moins grands, plus facilement manipulables

Exemple 2.2
Plutôt que de manipuler le nombre 100000*, il peut être plus aisé de manipuler le nombre* $\log(100000) = 5$.

- En donnant la possibilité de transformer des multiplications difficiles en simples additions.

  Exemple 2.3
  $3^2 \times \frac{5}{7}$ *devient* $\log\left(3^2 \times \frac{5}{7}\right) = 2 \times 3 + 5 - 7$

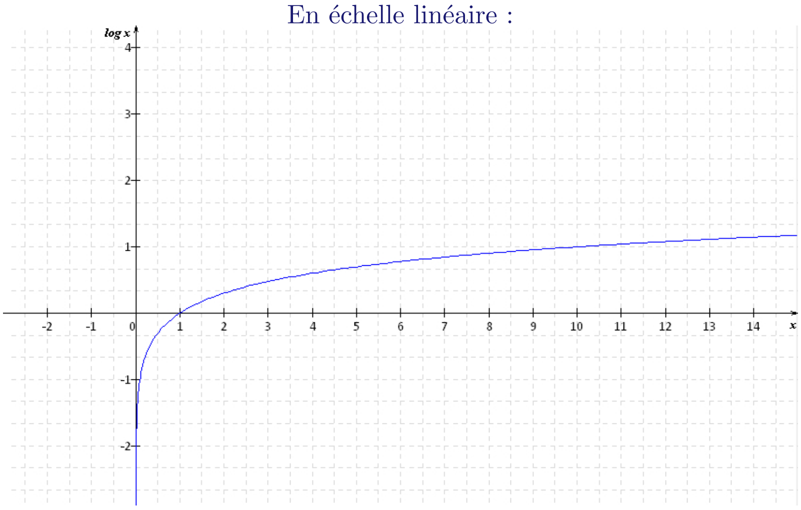
Certains phénomènes physiques se modélisent bien grâce à des fonctions exponentielles. Par exemple, l'intensité du son est couramment exprimée en déciBel, une forme de logarithme, car nos oreilles ne sont pas linéaires.

2.1.4 Échelle logarithmique

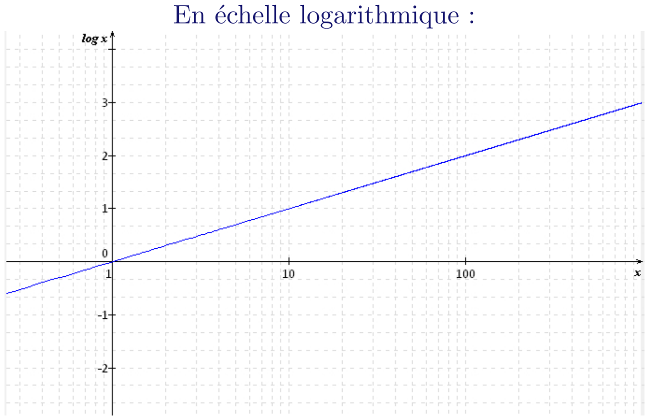
Les fonctions logarithmiques ont la particularité de croître très lentement.
Les échelles orthonormées ne sont donc pas adaptées à leur représentation graphique, et on utilise plutôt une échelle logarithmique pour l'axe représentant $\log 10$. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto \log x$ est alors une droite *(voir les TP d'OIS)*.

Exemple pour la fonction $\log_{10}$:

En échelle linéaire :

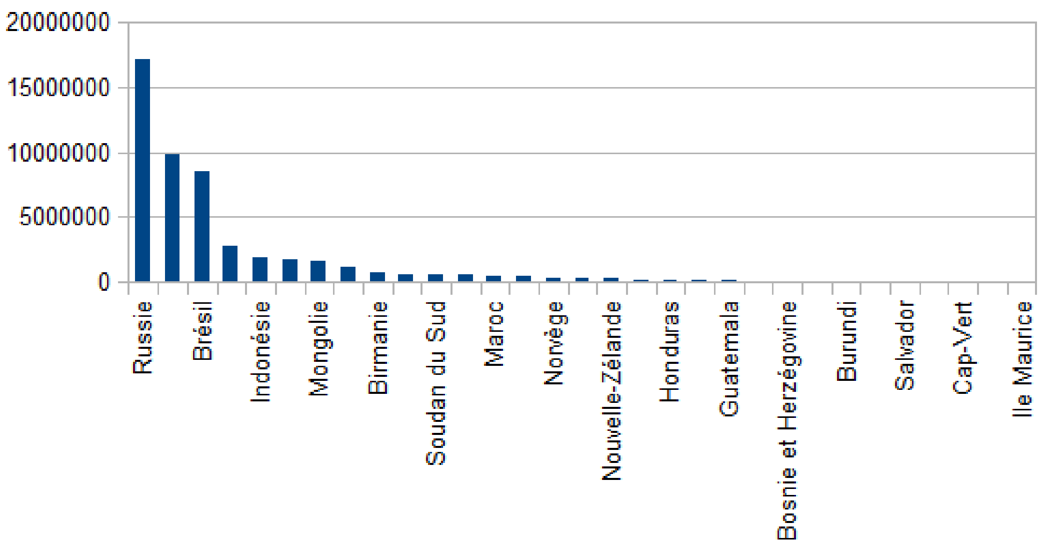


En échelle logarithmique :

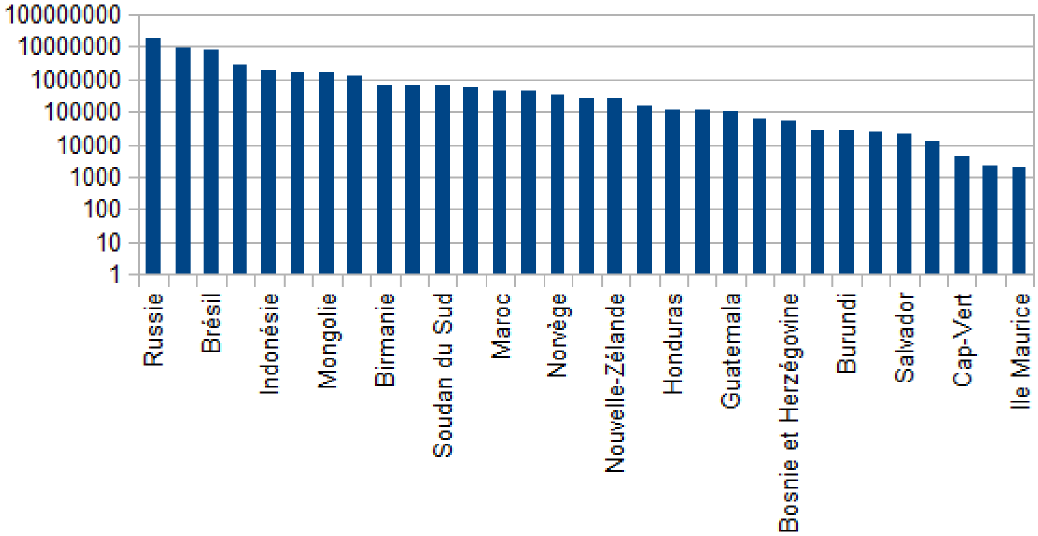


Les échelles logarithmiques permettent ainsi de percevoir des évolutions invisibles en échelle linéaire.

Exemple 2.4
Ce graphique représente les superficies (en km^2) de quelques pays en échelle linéaire :



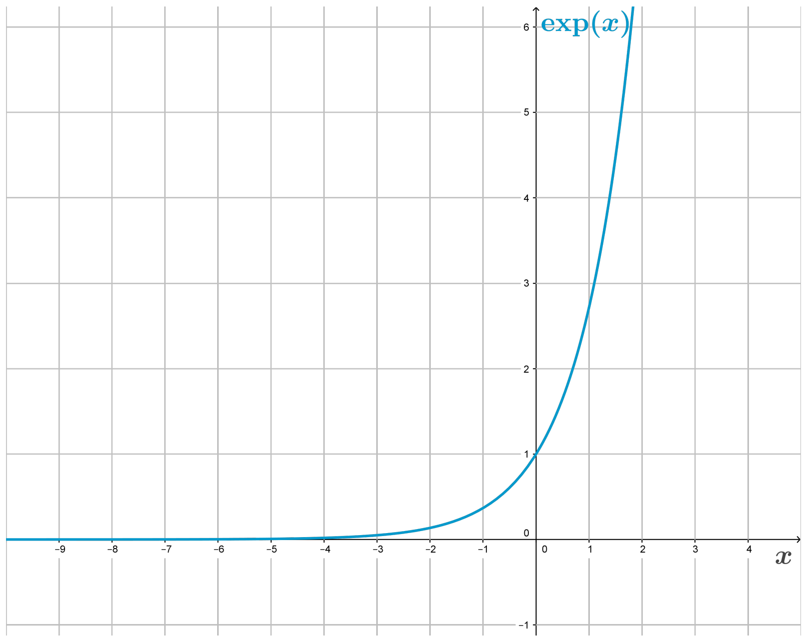
On ne voit rien pour les plus petits pays. Mais si on passe en échelle log, on voit tous les pays :



2.2 Fonctions exponentielles

2.2.1 Fonction exponentielle de base e

Définition

Définition	La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien : $$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \exp(x) \quad \text{ou} \quad e^x \quad \text{tel que } \ln(e^x) = e^{\ln x} = x \end{array}$$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	

e est un nombre, appelé *nombre d'Euler* ou *constante de Néper*, tel que $\ln(e) = 1$.

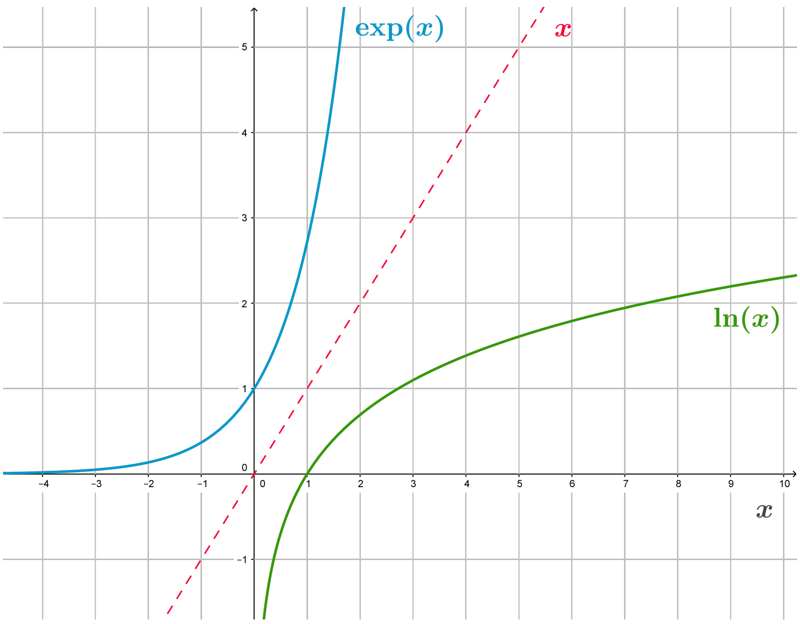
Il vaut $e = e^1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \approx 2,71828$.

La fonction exponentielle fonctionne “comme les puissances” : e^x est égal au nombre e à la puissance x. Par exemple $e^3 = e \times e \times e$.
Mais quand on vous a présenté les puissances au collège, on ne les a définies que pour des nombres entiers. La fonction exponentielle permet de généraliser cette notion aux nombres non entiers : grâce à la fonction exponentielle on peut maintenant par exemple définir $e^{2,5}$.

Liens entre les fonctions $\exp$ et $\ln$

Les fonction exp et ln sont réciproques l'une de l'autre :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \forall x \in \mathbb{R} & : & \ln(e^x) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+ & : & \exp(\ln x)) = x \end{array}}$$



Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés que pour les puissances :

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- $e^0 =$
- $\lim\limits_{a \to -\infty} e^x =$
- $\lim\limits_{a \to +\infty} e^x =$
- $e^{a+b} =$
- $\dfrac{e^a}{e^b} =$
- $(e^a)^b =$

2.2.2 Fonctions exponentielles généralisées

Définitions

La fonction exponentielle de base a (encore appelée “fonction a puissance x”) est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & a^x = e^{x \ln a} \end{array}$$

Par exemple la fonction exponentielle de base 10 est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 10^x \end{array}$$

Propriétés

$\forall a > 0$:

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

2.2.3 A propos des fonctions exponentielles

On parle parfois de “Croissance exponentielle”, quand on a une augmentation très rapide d’une grandeur.
En effet, le nombre e n’est pas énorme à priori : $e \approx 2,718$.
Mais on a déjà $e^{10} \approx 22026,5$.
De nombreux phénomènes physiques varient en exponentielle. En fait, dès que la croissance d’une grandeur est proportionnelle à cette grandeur elle même il y a une variation exponentielle. Par exemple :

- Le nombre de noyaux radioactifs lors d’une désintégration radioactive ;
- Nombre des charges électriques lors de la décharge électrique d’un condensateur ;
- Vitesse des réactions chimiques du premier ordre ;
- Évolution d’une population de bactéries dans un milieu de culture ;
- ...

3 Fonctions hyperboliques

3.1 Activité d’introduction

PARTIE A

On appelle fonctions *cosinus hyperbolique* (notée ch) et *sinus hyperbolique* (notée sh) les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$\text{Pour tout réel x :} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(0n rencontre aussi les notations cosh et sinh pour ch et sh.)

1. (a) Étudiez la parité des fonctions ch et sh en rédigeant soigneusement.
   Qu’en déduit-on pour les courbes de ces deux fonctions ?
   (b) Déterminez la fonction $\operatorname{ch} + \operatorname{sh}$.
2. (a) Déterminez les limites éventuelles des fonctions ch et sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Montrez que les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Déterminez les fonctions dérivées ch' et sh'.
3. (a) Dressez les tableaux de variations des fonctions ch et sh.
   (b) Soit la fonction $f = \operatorname{ch} - \operatorname{sh}$.
   Étudiez le signe des valeurs prises par f et la limite éventuelle de f en $+\infty$.
   Que déduire de ces deux résultats pour les courbes des fonctions ch et sh ?
   (c) Tracez les courbes des deux fonctions ch et sh dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
   La courbe de la fonction ch est appelée *chaînette*, essayez de rechercher (dictionnaire,...) en quelles circonstances on rencontre cette courbe.

PARTIE B

De façon analogue à la trigonométrie circulaire (avec les fonctions cos et sin), on peut développer une trigonométrie hyperbolique (avec les fonctions ch et sh).
Dans toute cette partie, a et b sont deux réels quelconques.

1. Calculez $\cosh^2 a + \sinh^2 a$ et $\cosh^2 a - \sinh^2 a$.

2. Exprimez $\operatorname{ch} a \ \operatorname{ch} b$, $\operatorname{sh} a \ \operatorname{sh} b$, $\operatorname{ch} a \ \operatorname{sh} b$ et $\operatorname{sh} a \ \operatorname{ch} b$ en fonction de $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{ch}(a-b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$ et $\operatorname{sh}(a-b)$.
   Déduisez-en $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{ch}(a-b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a-b)$, $\operatorname{ch}(2a)$ et $\operatorname{sh}(2a)$ en fonction de $\operatorname{ch}(a)$, $\operatorname{ch}(b)$, $\operatorname{sh}(a)$ et $\operatorname{sh}(b)$.
3. On appelle fonction *tangente hyperbolique* (notée th ou tanh) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{Pour tout réel x :} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

   (a) Justifiez que cette fonction est effectivement définie sur $\mathbb{R}$ et étudiez sa parité.
   (b) Déterminez les limites éventuelles de la fonction th en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Qu'en déduit-on ?
   (c) Étudiez la dérivabilité de th.
   Déterminez la fonction th', d'une part en fonction de ch, d'autre part en fonction de th.
   Dressez le tableau de variations de la fonction th.
   Montrez que les courbes des fonctions sh et th ont la même tangente (que vous déterminerez) en 0.
   Tracez la courbe de la fonction th dans le même repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ que précédemment.
   (d) Exprimez $\operatorname{th}(a+b)$, $\operatorname{th}(a-b)$ et $\operatorname{th}(2a)$ en fonction de $\operatorname{th}(a)$ et $\operatorname{th}(b)$.

Dans les questions 4, 5 et 6, indépendantes, les notations m et x_0 désignent des réels différents.

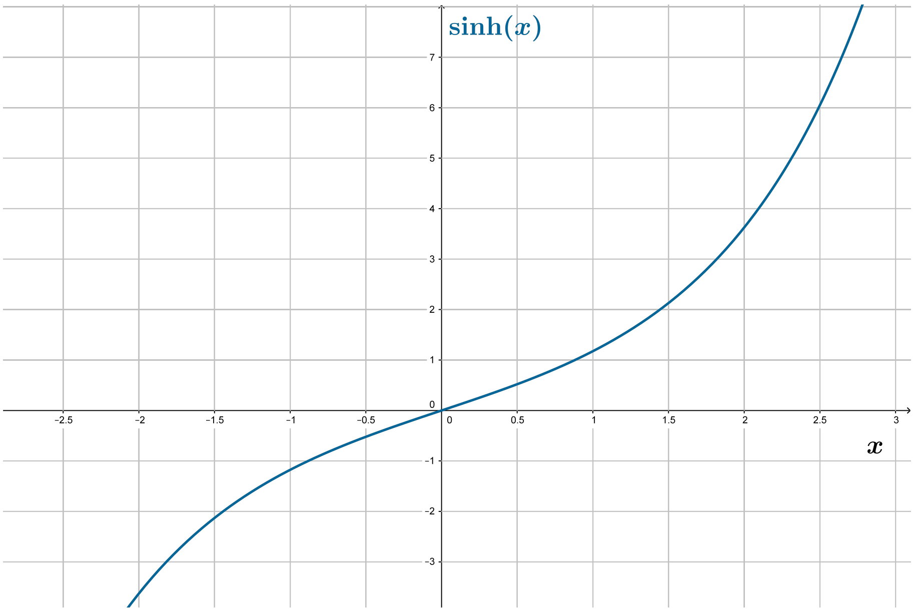
4. (a) Soit m un réel de $]-1\ ;\ 1[$.
   A l'aide d'un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, montrez avec soin que l'équation $\operatorname{th}(x) = m$ a une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrez que, pour tout réel x : $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
   Exprimez x_0 en fonction de m.
5. (a) Soit m un réel quelconque.
   A l'aide d'un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, montrez avec soin que l'équation $\operatorname{sh}(x) = m$ a une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Exprimez x_0 en fonction de m.
6. (a) Soit m un réel de $[1\ ;\ +\infty[$.
   A l'aide d'un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, montrez avec soin que l'équation $\operatorname{ch}(x) = m$ a une unique solution x_0 sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Exprimez x_0 en fonction de m.

$\boxed{e^{i\,\pi} = -1}$

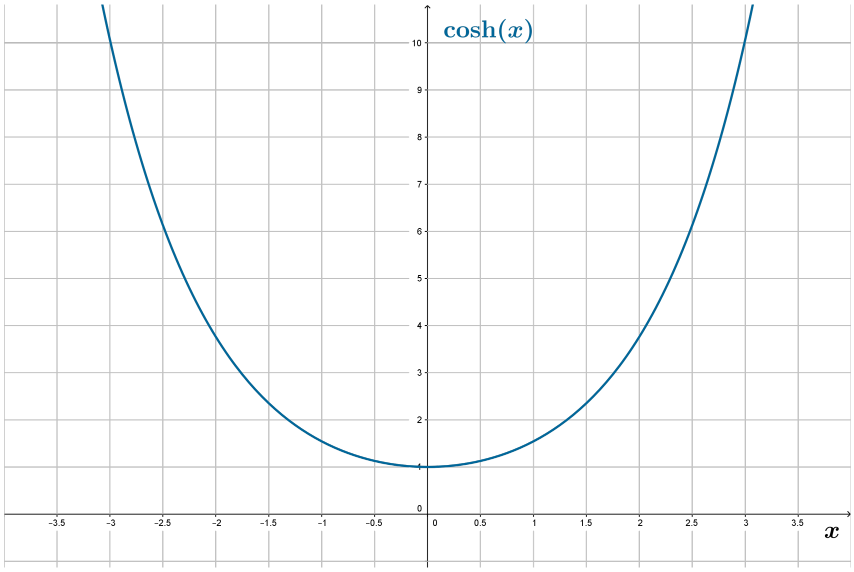
Cette relation de Léonard Euler, mathématicien suisse et... borgne du XVIII ème siècle, fascine car elle fait intervenir quatre constantes capitales : e, i, π et l'entier 1.

3.2 Définitions

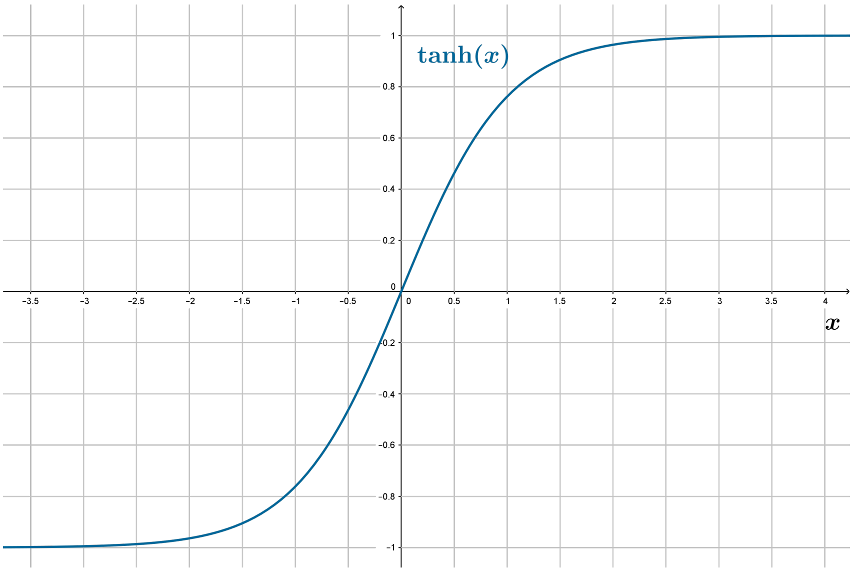
3.2.1 Fonction sinus hyperbolique

Définition :	La fonction sinus hyperbolique, notée sinh ou sh est définie par : $$\begin{array}{rccl} \sinh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	

3.2.2 Fonction cosinus hyperbolique

Définition :	La fonction cosinus hyperbolique, notée cosh ou ch est définie par : $$\begin{array}{rccl} \cosh : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [1\ ;\ +\infty[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	

3.2.3 Fonction tangente hyperbolique

Définition :	La fonction tangente hyperbolique, notée tanh ou th est définie par : $$\begin{array}{rccl} \tanh : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1\,;\,1[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	

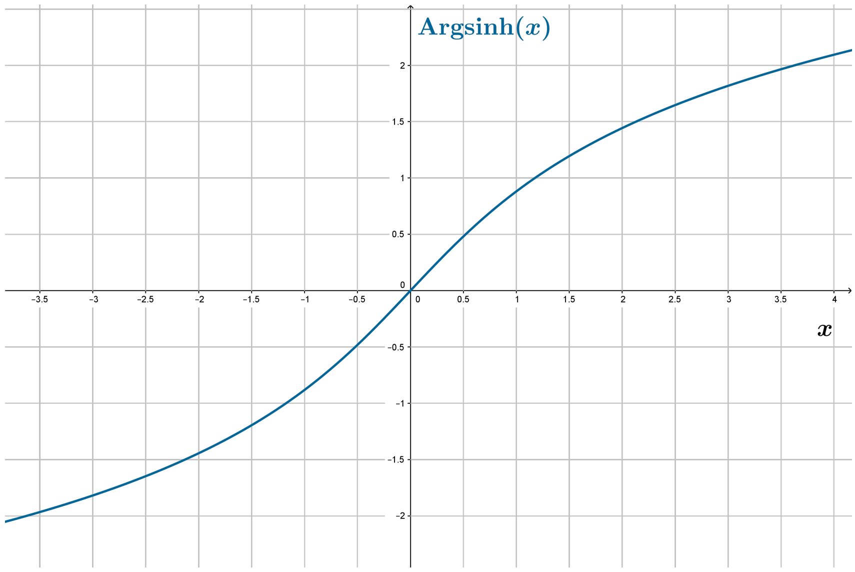
3.3 Relations de trigonométrie hyperbolique

Ce sont toutes les relations du formulaire.
Vous devez savoir qu'elles existent et être capables de les retrouver grâce aux définitions des fonctions hyperboliques.

3.4 Fonctions hyperboliques réciproques

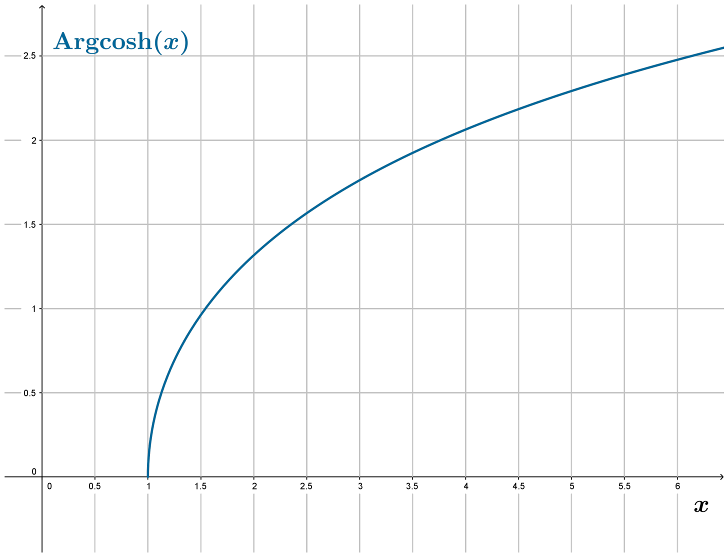
3.4.1 Fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique

La fonction sinh est bijective sur $\mathbb{R}$, donc on n'a pas de problème à définir sa fonction réciproque.
La fonction réciproque est appelée **argument sinus hyperbolique** et est notée Argsinh ou Argsh.

Définition :	$\begin{array}{rccl} \text{Argsinh} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \text{Argsh}(x) \quad \text{tel que} \quad \text{sh}(y) = x \end{array}$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	$\begin{array}{rccl} \text{Argsinh}' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$
Forme logarithmique	$\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

3.4.2 Fonction réciproque de la fonction cosinus hyperbolique

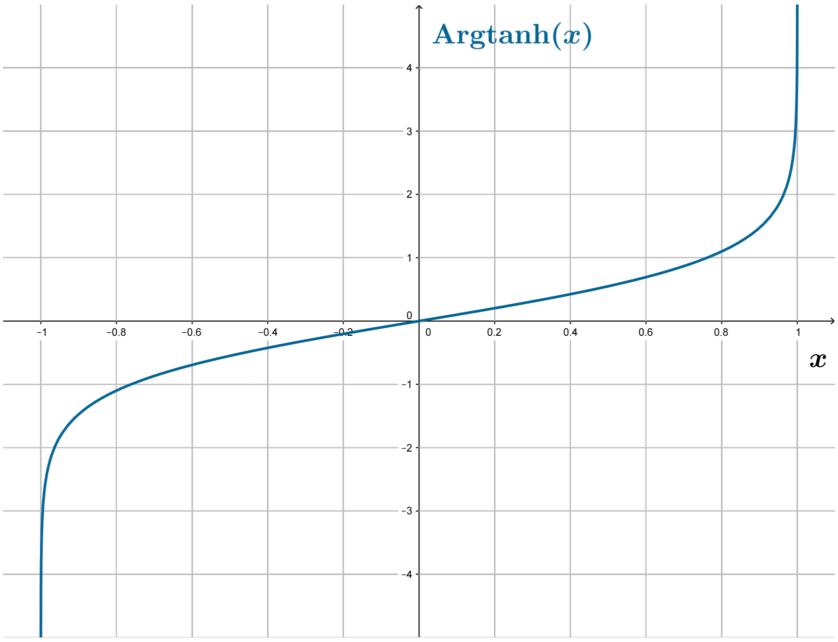
La fonction cosh n'étant pas bijective sur $\mathbb{R}$, pour définir sa fonction réciproque il faut se limiter à un intervalle sur lequel elle l'est.
On se limite à la fonction cosh définie sur $\mathbb{R}_+$. La fonction réciproque de cette fonction est appelée **argument cosinus hyperbolique** et est notée Argcosh ou Argch.

Définition :	$\begin{array}{rccl} \text{Argcosh}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & y=\text{Argch}(x) \quad \text{tel que} \quad \text{ch}(y)=x \end{array}$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	$\begin{array}{rccl} \text{Argcosh}': &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$
Forme logarithmique	$\text{Argch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

Attention à l'utilisation de la fonction Argcosh de la calculatrice !
Lorsque vous demandez à votre calculatrice de calculer Argcosh(x), elle vous affichera le résultat compris dans l'intervalle $[0,+\infty[$, par définition de la fonction Argcosh. Il faut toujours bien garder en tête que $-x$ est également solution !

3.4.3 Fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique

La fonction tanh est bijective sur $\mathbb{R}$, donc on n'a pas de problème à définir sa fonction réciproque. La fonction réciproque est appelée **argument tangente hyperbolique** et est notée Argtanh ou Argth.

Définition :	$\begin{array}{rrcl} \text{Argtanh :} &]-1\,;\,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \text{Argth}(x) \quad \text{tel que} \quad \text{th}(y) = x \end{array}$
Courbe représentative	
Parité	
Dérivée	$\begin{array}{rrcl} \text{Argtanh}' : &]-1\,;\,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x^2} \end{array}$
Forme logarithmique	$\text{Argth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

4 Exercices du chapitre 2

Exercice 2.1
Déterminer la période et l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sin(2x)$
2. $f_2 : x \mapsto \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \tan(3x - \pi)$

Exercice 2.2
Déterminer le domaine de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sin(3x - 2)$
2. $f_2 : t \mapsto \tan\left(\dfrac{t-5}{3}\right)$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$
4. $f_4 : y \mapsto \tan^2(3y)$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(\sqrt{x})}$
6. $y : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sin x}$
7. $x : t \mapsto \cos(2t^2 + 7)$

Exercice 2.3
Soit la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)$ où a est un nombre réel.

1. Donner le domaine de définition de f en précisant la condition sur a.
2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \arctan'(x)$.

Exercice 2.4
Soit la fonction $f : x \mapsto f(x) = 3\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1. Déterminer son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer sa période.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathcal{D}_f$ puis sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
4. Quelle est la valeur maximale M prise par $f(x)$?
   Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = M$.
5. Quelle est la valeur minimale m prise par $f(x)$?
   Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = m$.
6. Grâce aux questions précédentes, tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction.
7. Déterminer la dérivée de f.

Exercice 2.5
Résoudre les équations suivantes (donner la solution exacte si possible, une solution approchée sinon) :

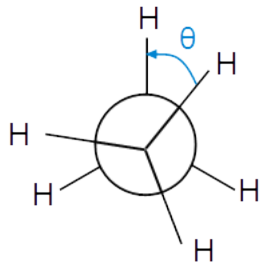
1. $\sin(2x - \pi) = 0$ sur $\mathbb{R}$
2. $\tan(3x) - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$
3. $\cos(3x) + 1 = 0$ sur $[0 ; 2\pi[$
4. $\cos x = 0,45$ sur $[0 ; 2\pi[$
5. $\sin(2x) = -0,5$ sur $[0 ; 2\pi[$
6. $\tan(2x) = 10$ sur $[-\pi ; \pi[$
7. $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ sur $[0 ; 2\pi[$

Exercice 2.6

1. Soit la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$.
   (a) Dresser son tableau de variation.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 2.7
Le but de cet exercice est de justifier la conformation stable de la molécule d'éthane.

On appelle **angle dièdre** l'angle θ entre deux hydrogènes appartenant aux deux carbones *(voir schéma ci-dessous).*



L'énergie molaire de la molécule en fonction de l'angle dièdre peut en première approximation être modélisée par la fonction $E(\theta) = E_0\left[-\sin\left(3\theta + \dfrac{3\pi}{2}\right) + 1\right]$ avec $E_0 = 1,5\ kcal/mol$.

1. Sur quel intervalle est-il intéressant d'étudier $E(\theta)$?
2. Tracer $E(\theta)$ sur cet intervalle en faisant apparaître les valeurs particulières.
3. La conformation stable de la molécule est celle pour laquelle cette énergie est minimale.
   Déterminer la ou les valeurs de θ correspondant à cette conformation stable.
   Dessiner la molécule dans cette conformation et justifier l'appellation de **conformation décalée**.
4. Déterminer la ou les valeurs de θ correspondant à la conformation la moins stable.
   Dessiner la molécule dans cette conformation et justifier l'appellation de **conformation éclipsée**.

Exercice 2.8
Déterminer le domaine de définition et les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : t \mapsto \ln(t^2)$
2. $f_2 : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$
3. $f_3 : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{t+2}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$
5. $f_5 : y \mapsto \ln\left((y-1)^2\right)$
6. $x : t \mapsto \cos(\ln t)$
7. $f_7 : t \mapsto \log(t^2)$
8. $f_8 : x \mapsto \log_3(1-x)$

Exercice 2.9
Déterminer le domaine de définition et les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto e^{3x}$
2. $f_2 : t \mapsto e^{t^2-2}$
3. $f_3 : x \mapsto (1+e^x)^3$
4. $f_4 : x \mapsto e^{\sin x}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-3x}}$
6. $f_6 : t \mapsto \sqrt{4-e^x}$
7. $f_7 : x \mapsto 5^x$
8. $f_8 : t \mapsto 3^{t-1}$

Exercice 2.10
Soit $\phi = \ln(a^2b^3) - \ln(\sqrt[4]{a^3b^5}) + \ln(\sqrt[3]{b^2}) + \ln(\sqrt{a^7b^3})$.
Exprimer ϕ en fonction de $\ln a$ et $\ln b$.

Exercice 2.11
Résoudre les équations ou systèmes d'équations suivants :

1. $\ln\left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2\right) = 3$
2. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \left(\dfrac{8}{27}\right)^{1-x} = \dfrac{2}{3}$
3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
   Remarque : 0^0 n'est pas défini.
4. $\log_3 x = \dfrac{1}{2} + \log_9(3x+12)$
5. $\log(x^2-1) = \log(2x-1) - \log 2$
6. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$
7. $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$
8. $\begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right) = 9 \\ x + 3y - 2z = -1 \\ \ln(xy^5) = -\dfrac{17}{2} \end{cases}$

Exercice 2.12

1. Faire l'étude de la fonction $f_1(x) = x - \ln(1+x)$.
2. Faire l'étude de la fonction $f_2(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$
3. Établir pour tout $x \geqslant 0$ l'encadrement suivant :
$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$
4. Montrer alors que $\forall x > 0$ on a $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant 1$.
5. En déduire que $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant e$.

Exercice 2.13

Soit un condensateur de capacité C.
On le charge à une tension $E > 0$, puis on le laisse se décharger dans un résistor de résistance R.
La tension à ses bornes en fonction du temps est alors donnée par :
$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$
On rappelle que R et C sont des constantes positives.

1. Quelle est la tension à $t = 0$?
2. La tension augmente-t-elle ou diminue-t-elle au cours du temps ?
3. Quelle est la valeur u_0 atteinte par la tension u si on laisse le condensateur se décharger pendant très longtemps ?
4. (a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $u(t)$ en $t = 0$.
   (b) Déterminer en fonction de R et C l'expression de l'instant τ auquel cette tangente coupe la courbe d'équation $u = u_0$.
   (c) Donner l'expression de la durée t_1 nécessaire pour que le condenseur soit déchargé à 90%, c'est-à-dire que la tension est égale à 10% de sa valeur initiale

Exercice 2.14

On chauffe une citerne initialement à la température de $20°C$ par une résistance.
La température θ est donnée en fonction du temps t par la fonction $\theta(t)$ vérifiant l'équation :
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = a - b\theta(t)$$
avec $a = 2,088.10^{-2}\ °C.s^{-1}$ et $b = 2,32.10^{-4}\ s^{-1}$.

1. Déterminer α et β pour que la fonction $\theta(t) = \alpha e^{-bt} + \beta$ soit solution.
2. Déterminer la durée de chauffe nécessaire pour obtenir une température de $80°C$.

Exercice 2.15

Soit un nénuphar qui pousse sur un étang de 500 m^2. Sa croissance est telle qu'il double de taille chaque jour, et qu'il couvre la totalité de son étang en 100 jours.

1. Quelle est la taille du nénuphar au 99è jour ? Au 98è jour ?
2. Exprimer la taille $T(J)$ du nénuphar au jour J.

Exercice 2.16

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x \sin(x)}{3x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2 + x - 6}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^{3x}}{x^2 + 1}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{3x^2 + x - 6}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(3x)}{x}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin^2(x)}{x}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{4x^2}$

Exercice 2.17
Déterminer le domaine de définition et la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : t \mapsto \cosh(2t-1)$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\tanh x}$
3. $f_3 : y \mapsto \sqrt{\sinh(2y)}$
4. $f_4 : x \mapsto \ln(\sinh x)$
5. $f_5 : x \mapsto \cosh(x^2)$
6. $x : m \mapsto \tanh(\sqrt{3m-7})$

Exercice 2.18
Soient $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 0$ tels que $x = \cosh(y)$.

1. Montrer que $2x = e^y + e^{-y}$ et en déduire que $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$.
2. On pose $Y = e^y$.
   (a) Déterminer l'équation du seconde degré à laquelle obéit Y.
   (b) Monter que cette équation a à priori deux solutions $Y_1 = \dfrac{2x + 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$ et $Y_2 = \dfrac{2x - 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x - \sqrt{x^2-1}$.
   (c) Vérifier que $Y_1 \geq 1$.
   (d) En utilisant l'identité remarquable $(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1$, montrer que Y_2 ne peut pas être solution.
3. En déduire que l'on peut écrire : $\mathrm{Argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
   C'est l'écriture logarithmique de la fonction argument cosinus hyperbolique.

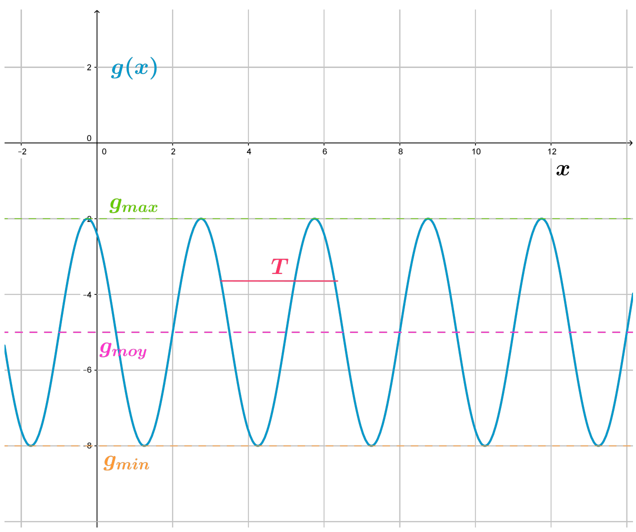
Exercice corrigé 2.1
Soit la fonction $g : x \mapsto g(x) = 3\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}(x-2)\right) - 5$.

1. Déterminer la période, la valeur maximale et la valeur minimale de $g(x)$.
2. Tracer la courbe représentative de g en faisant apparaitre les valeurs particulières.

1.
- Période T : $\dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{3} \Longrightarrow \boxed{T = 3}$.
- Valeur maximale M : $M = 3 - 5 \Longrightarrow \boxed{M = -2}$.
- Valeur minimale m : $m = -3 - 5 \Longrightarrow \boxed{m = -8}$.

2.
- La valeur max est atteinte pour $\dfrac{2\pi}{3}(x-2) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Longrightarrow x = \dfrac{11}{4} + 3k = \ldots ; -\dfrac{3}{4} ; -\dfrac{1}{4} ; \dfrac{11}{4} ; \dfrac{23}{4} ; \dfrac{35}{4} ; \ldots$.
- La valeur min est atteinte pour $\dfrac{2\pi}{3}(x-2) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Longrightarrow x = \dfrac{5}{4} + 3k = \ldots ; -\dfrac{19}{4} ; -\dfrac{7}{4} ; \dfrac{5}{4} ; \dfrac{17}{4} ; \dfrac{29}{4} ; \ldots$.
- La valeur moyenne -5 est atteinte pour $\dfrac{2\pi}{3}(x-2) = k\pi \Longrightarrow x = 2 + \dfrac{3}{2}k = \ldots ; -1 ; \dfrac{1}{2} ; 2 ; \dfrac{7}{2} ; 5 ; \ldots$.

Ce qui donne :



Exercice corrigé 2.2
Faire l'étude des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto e^{2x+3}$
2. $f_2 : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$
3. $f_3 : x \mapsto e^{x^3-x}$

1. $f_1 : x \mapsto e^{2x+3}$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = 2e^{2x+3}$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f_2 : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$		$-$	$\Vert$		$-$
f	1	$\searrow$	$0 \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	1

3. $f_3 : x \mapsto e^{x^3-x}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x) = (3x^2-1)e^{x^3-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$	$\searrow$	$e^{-\frac{2}{3\sqrt{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice corrigé 2.3
On se trouve dans une ville de 10 000 habitants.
A 8h du matin, 100 personnes apprennent une nouvelle, et commencent à la répandre.
On note dès lors $y(t)$ $(0 \leq y(t) \leq 1)$ la proportion de la population connaissant cette nouvelle à l'instant t, l'origine des temps étant prise à 8h ($t = 0$ à 8h).

On propose une modélisation de la propagation de la rumeur où la vitesse de propagation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ est proportionnelle à la fois à la proportion de la population qui connait la nouvelle et à la proportion de la population qui ne la connaît pas, le coefficient de proportionnalité étant de $1,15\ h^{-1}$.

1. Justifier que $y(t)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1,15y(t) - 1,15(y(t))^2$ et donner la valeur de $y(0)$.
2. On pose $y(t) = \frac{1}{z(t)}$.
   Montrer que la fonction z obéit à l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 1,15(1 - z(t))$.
3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{R}$ la fonction $z(t) = 1 + ke^{-1,15t}$ est solution de l'équation précédente et en déduire l'expression de $y(t)$ (utiliser la condition initiale pour trouver k).
4. Toute la population finira-t-elle par être au courant ?
5. Combien de personnes connaissent la nouvelle à midi ?
6. Calculer l'heure à laquelle 99 % de la population sera au courant.

1.
   - La proportion de la population au courant est $y(t)$.
     La proportion de la population qui n'est pas au courant est $1 - y(t)$.
     On a donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1,15 \times y(t) \times (1 - y(t)) \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1,15y(t) - 1,15(y(t))^2}$
   - $y(0) = \frac{100}{10000} \Longrightarrow \boxed{y(t) = 10^{-2}}$
2.
   - $y(t) = \frac{1}{z(t)}$
   - $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{z(t)} = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(z(t))^2}$

   On remplace dans l'équation différentielle précédente :

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1,15y(t) - 1,15(y(t))^2 \\
\Longrightarrow\ & -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(z(t))^2} = 1,15\frac{1}{z(t)} - 1,15\frac{1}{(z(t))^2} \\
\Longrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -1,15z(t) + 1,15 \\
\Longrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 1,15(1 - z(t))}
\end{aligned}
$$

3.
   - Soit $z(t) = 1 + ke^{-1,15t}$; $k \in \mathbb{R}$.
     On calcule $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -1,15ke^{-1,15t} = -1,15(z(t)-1) = 1,15(1-z(t))$.
     Cette fonction est donc bien solution de l'équation précédente.
   - On en déduit $y(t) = \dfrac{1}{1+ke^{-1,15t}}$.
     La constante k peut être déterminée grâce à la condition initiale :

$$y(0) = 10^{-2} \Longrightarrow \frac{1}{1+k} = \frac{1}{100} \Longrightarrow k = 99$$

     Donc finalement $\boxed{y(t) = \dfrac{1}{1+99e^{-1,15t}}}$

4. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 1$ donc toute la population finira par être au courant si l'on attend suffisamment longtemps.
5. A midi, $t = 4\,h$.
   $y(4) = \dfrac{1}{1+99e^{-1,15\times 4}} = 0,5$ donc la moitié de la population est courant, soit 5 000 personnes.
6. Soit T l'instant auquel 99 % de la population sera au courant :

$$\begin{aligned} & y(T) = 0,99 \\ \Longrightarrow\quad & \frac{1}{1+99e^{-1,15T}} = 0,99 \\ \Longrightarrow\quad & 1+99e^{-1,15T} = \frac{1}{0,99} \\ \Longrightarrow\quad & e^{-1,15T} = \frac{1}{99^2} \\ \Longrightarrow\quad & -1,15T = -2\ln 99 \\ \Longrightarrow\quad & T = \frac{2\ln 99}{1,15} \end{aligned}$$

   L'application numérique donne $T = 7,99h \approx 8\,h$.
   Donc 99 % de la population sera au courant à 15h.

Exercice corrigé 2.4
Faire l'étude des fonctions suivantes :

1. $g : x \mapsto \cosh(2x-1)$
2. $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sinh(x^2-1)}$

1. $g : x \mapsto \cosh(2x-1)$:

x	$-\infty$		$frac12$		$+\infty$
$g'(x) = 2\sinh(2x-1)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2. $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sinh(x^2-1)}$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x) = --\dfrac{2x\cosh(x^2-1)}{\sinh^2(x^2-1)}$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\sinh(-1)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Exercice corrigé 2.5
Montrer que $\forall n \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$.

On a d'une part :

$$\begin{aligned} (\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x))^n &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^n \\ &= (e^x)^n \\ &= e^{nx} \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(nx)+\mathrm{sh}(nx) &= \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2} + \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2} \\ &= e^{nx} \end{aligned}$$

Donc on a bien $\boxed{(\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx)+\mathrm{sh}(nx)}$.

Exercice corrigé 2.6

On montre que sur $\mathbb{R}_+$ on peut mettre les fonctions argument du cosinus hyperbolique et argument du sinus hyperbolique sous la forme $\text{Argch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ et $\text{Argsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
Démontrer les expressions des dérivées de ces deux fonction arguments hyperboliques.

- Pour la fonction Argch :

$$\begin{aligned}
& \text{Argch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\
\Longrightarrow \quad & \text{Argch}'x = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\
\Longrightarrow \quad & \text{Argch}'x = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 1}{\sqrt{x^2 - 1}(x + \sqrt{x^2 - 1})} \\
\Longrightarrow \quad & \boxed{\text{Argch}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}
\end{aligned}$$

- Pour la fonction Argsh :

$$\begin{aligned}
& \text{Argsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\
\Longrightarrow \quad & \text{Argsh}'x = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
\Longrightarrow \quad & \text{Argsh}'x = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\
\Longrightarrow \quad & \boxed{\text{Argsh}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}
\end{aligned}$$

Exercice corrigé 2.7

Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x) - 1}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$ en se limitant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x) = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x) - 1}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

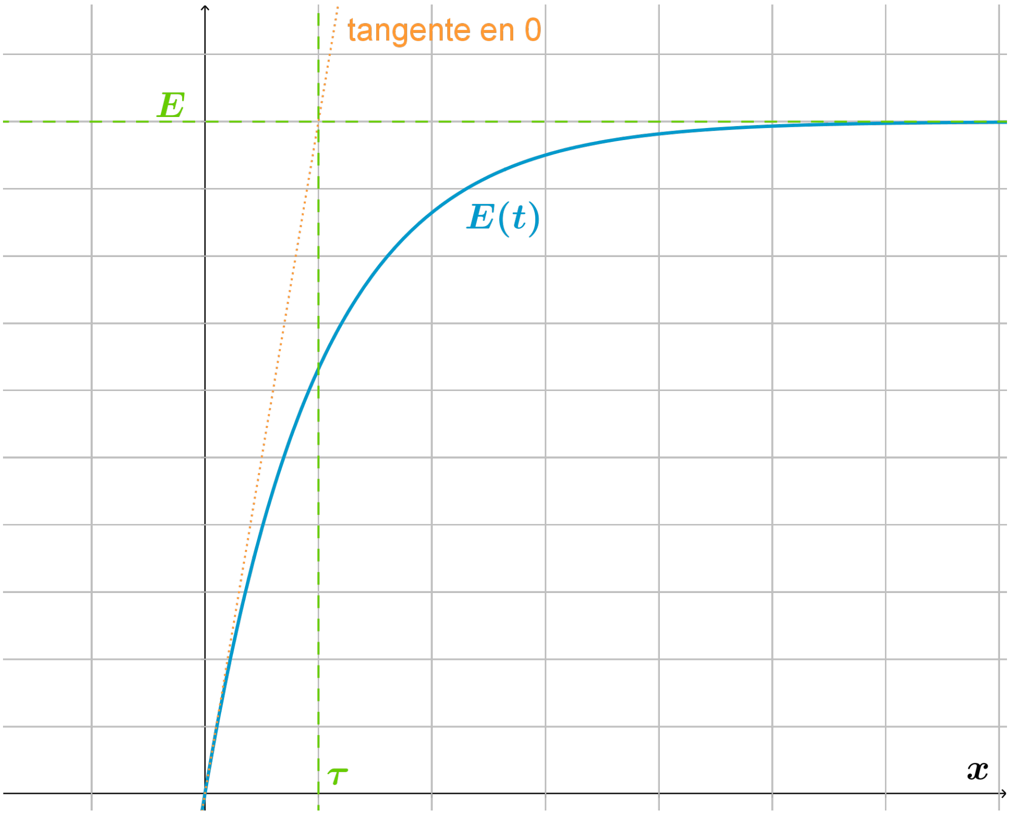
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x) = -\dfrac{2\cos x \sin x}{(\sin^2 x - 1)^2}$		$-$	$\Vert\ 0\ \Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert\ 0\ \Vert$	$+$	
g	-1	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	-1

Exercice corrigé 2.8

Lorsque l'on charge un condensateur initialement déchargé avec une tension continue E, la tension aux bornes du condensateur évolue au cours du temps selon la loi $u(t) = E\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$ avec $\tau = RC$ où R est la résistance interne du condensateur et C sa capacité.

1. Calculer $u(0)$.
2. Quelle est la valeur maximale atteinte par $u(t)$? Quand cette valeur est-elle atteinte ?
3. Tracer l'allure de $u(t)$ et faire apparaitre les éventuelles asymptotes.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $u(t)$ à l'instant $t = 0$ et la tracer sur le schéma.
5. Déterminer le temps auquel la tangente coupe l'asymptote.

6. On considère que le condensateur est chargé lorsque la tension a ses bornes a atteint 90 % de sa valeur maximale.
Déterminer en fonction de τ la durée t_0 de charge du condensateur.

1. $\boxed{u(0) = 0}$.
2. La fonction $u(t)$ est strictement croissante, donc la valeur maximale est atteinte quand t tend vers $+\infty$.
$u_{max} = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t) \Longrightarrow \boxed{u_{max} = E}$
3. 

4. $u(0) = 0$ et $u'(0) = \dfrac{E}{\tau}$ donc la tangente à l'origine a pour équation $\boxed{y = \dfrac{E}{\tau}t}$.
5. On cherche T tel que $\dfrac{E}{\tau}T = E \Longrightarrow \boxed{T = \tau}$.
C'est une caractéristique de la constante de temps.
6. $u(t_0) = 0,9E \Longrightarrow E\left(1 - e^{-t_0/\tau}\right) = 0,9E \Longrightarrow e^{-t_0/\tau} = 0,1 \Longrightarrow \boxed{t_0 = -\ln(0,1)\tau \approx 2,3\tau}$

Exercice corrigé 2.9
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{x+2} = e^{x^2}$
2. $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(x^2 - 4)$
3. $e^{2x-1} < e^{x^2}$
4. $\ln(1-2x) + \ln(x+1) \geq \ln(2x^2 + x + 3)$

1. $\mathcal{S} = \{-1 \; ; \; 2\}$
2. $\mathcal{S} =]2 \; ; \; +\infty[$
3. $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
4. $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

Exercice corrigé 2.10
Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{1 + \ln x}$
2. $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 4}$

1. $\mathcal{D}_f = [e^{-1} \; ; \; +\infty[$
2. $\mathcal{D}_g = [\ln 2 \; ; \; +\infty[$

Exercice corrigé 2.11
A l'aide du formulaire, mettre les expressions suivantes sous la forme $A\cos(x - \phi)$:

1. $\cos(x) + \sin(x)$
2. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$

1. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sin(x) &= \cos(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{x + x - \pi/2}{2}\right)\cos\left(\frac{x - x + \pi/2}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) &= 2\left[\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right] \\
&= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right]
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$

Exercice corrigé 2.12
Soit $y = a^b$ avec $a = e^{x^2}$ et $b = \dfrac{1}{x}\ln(x^{1/x})$.
Exprimer très simplement y en fonction de x.

- $a = e^{x^2}$
- $b = \dfrac{1}{x}\ln(x^{1/x}) = \dfrac{1}{x^2}\ln x$
- $y = a^b = \left(e^{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}\ln x} = \exp\left(x^2 \times \dfrac{1}{x^2}\ln x\right) = \exp(\ln x) \Longrightarrow \boxed{y = x}$

Exercice corrigé 2.13
Soient a et α deux constantes réelles non nulles.
Soit le système suivant, de variables x et y :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 2\,a\,\mathrm{ch}(\alpha) \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2\,a\,\mathrm{sh}(\alpha) \end{cases}$$

On cherche à résoudre ce système, c'est-à-dire exprimer x et y en fonction de a et α.

1. Montrer que $e^x = 2ae^\alpha - e^y$ et $e^x = \dfrac{1}{2ae^{-\alpha} - e^{-y}}$.
   En déduire l'expression de y en fonction de a et α.
2. Donner l'expression de x.

1.
   - On part du système :

   $$\begin{cases} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 2a\mathrm{ch}(\alpha) & (L_1) \\ \mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2a\mathrm{sh}(\alpha) & (L_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^x + e^y = 2ae^\alpha & (L_1 + L_2) \\ e^{-x} + e^{-y} = 2ae^{-\alpha} & (L_1 - L_2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^x = 2ae^\alpha - e^y \\ e^{-x} = 2ae^{-\alpha} - e^{-y} \end{cases}$$

   Comme $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ on a bien $\boxed{e^x = 2ae^\alpha - e^y = \dfrac{1}{2ae^{-\alpha} - e^{-y}}}$.

   - $e^x = 2ae^\alpha - e^y = \dfrac{1}{2ae^{-\alpha} - e^{-y}} \Longrightarrow 4a^2 + 1 - 2ae^{-\alpha+y} - 2ae^{\alpha-y} = 1 \Longrightarrow \cosh(\alpha - y) = 2a \Longrightarrow \boxed{y = \alpha - \mathrm{argcosh}(a)}$
2. La méthode est la même.
   En partant du deuxième système ci-dessus on a $e^y = 2ae^\alpha - e^x = \dfrac{1}{2ae^{-\alpha} - e^{-x}} \Longrightarrow 4a^2 + 1 - 2ae^{-\alpha+x} - 2ae^{\alpha-x} = 1 \Longrightarrow$
   $\cosh(\alpha - x) = 2a \Longrightarrow \boxed{x = \alpha - \mathrm{Argch}(a)}$

Chapitre 3

Intégration

3

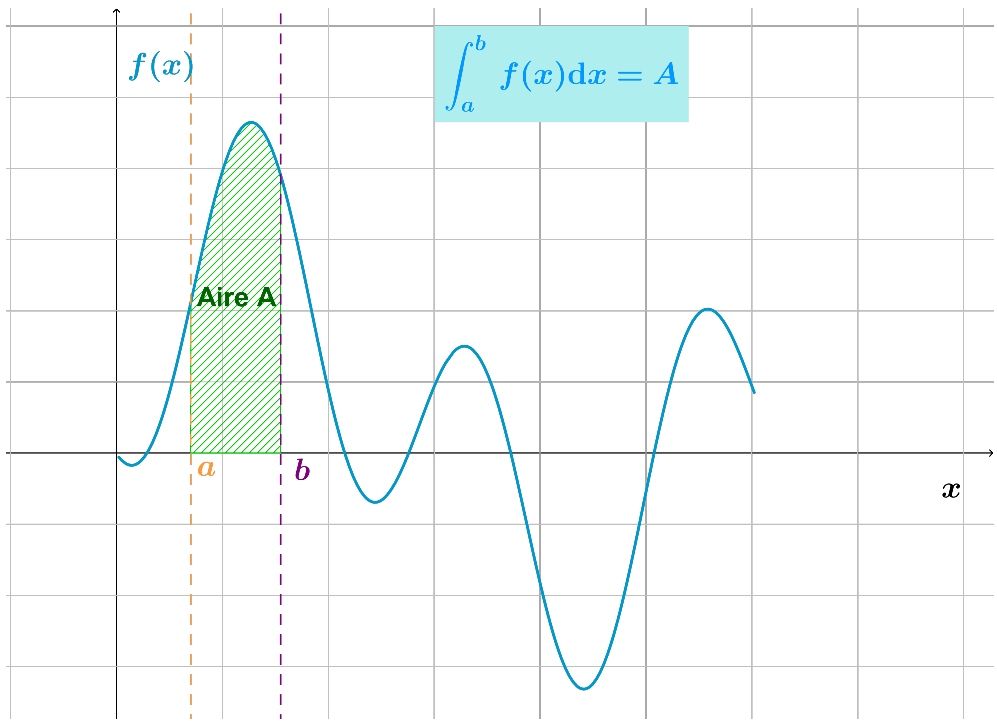
1 Définition d'une intégrale

1.1 Intégrale et aire sous la courbe

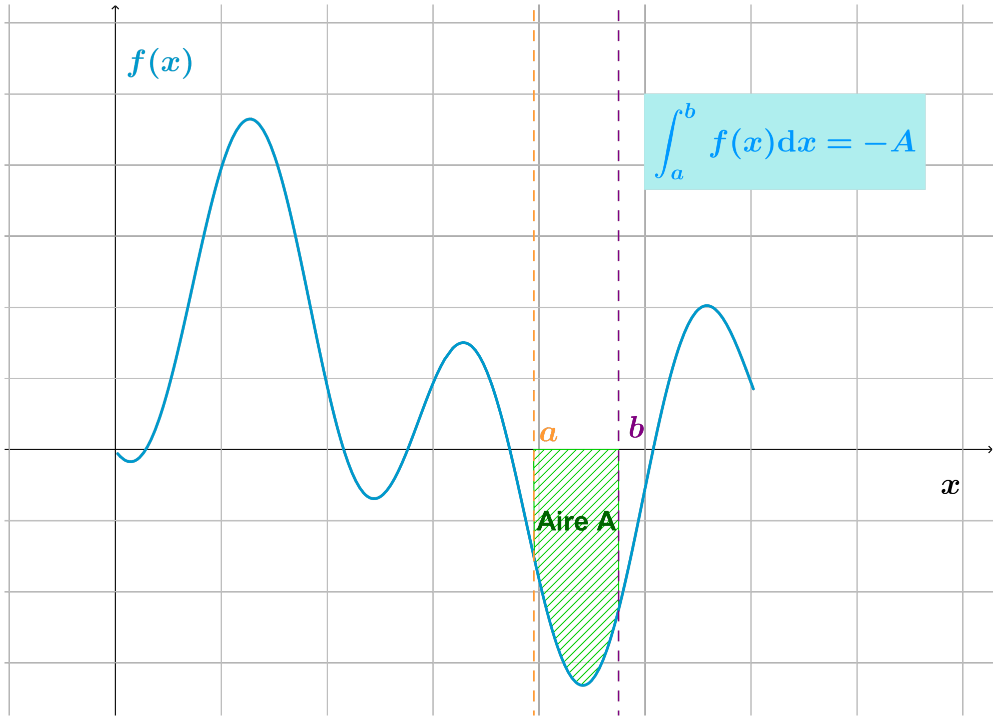
Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

L'intégrale de f entre a et b est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et est définie comme suit :

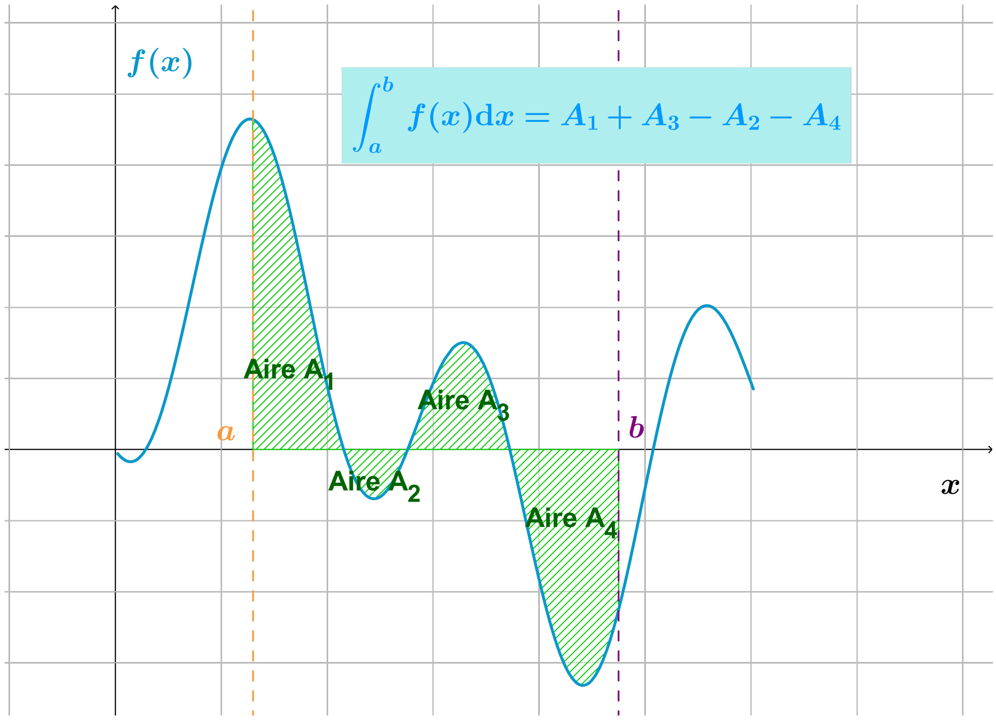
- Si f est positive sur $[a\ ;\ b]$, intégrale de f entre a et b est l'aire délimitée par $\mathcal{C}$ et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$:



- Si f est négative sur $[a\ ;\ b]$, l'intégrale de f entre a et b est l'opposé de l'aire précédente :



- Si f change de signe sur $[a\ ;\ b]$, l'intégrale de f entre a et b est la somme algébrique des aires comptées positivement et des aires comptées négativement :



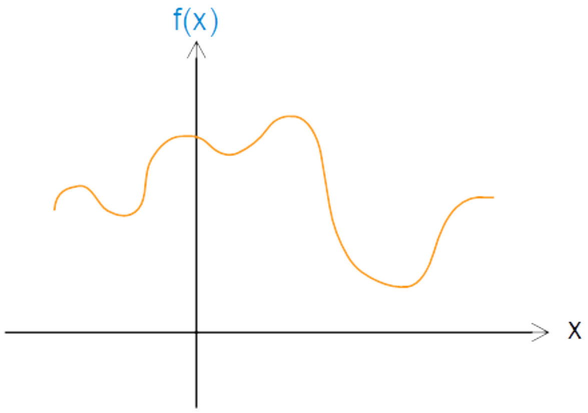
Exemple 3.1
Soit la fonction constante $f : x \mapsto k$ avec $k = cste$ définie sur un intervalle I.

Alors $\forall a, b \in I \quad : \quad \int_a^b f(t)\,dt = k \times (b-a)$

Remarque 3.1
La valeur de l'intégrale n'est pas nécessairement en m^2 !! L'unité dépend des unités de x et de $f(x)$...

1.2 Sommes de Darboux

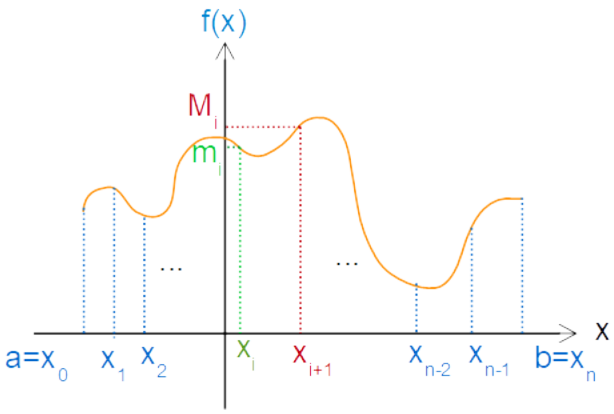
Soit une fonction f, et dont la représentation graphique serait la suivante :



On divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ avec :

$$\begin{cases} i \in \{0, 1, ..., n-1\} \\ x_0 = a \\ x_n = b \end{cases}$$

On appelle un tel découpage une **subdivision** de $[a, b]$ et on la note $\sigma = [a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b]$.



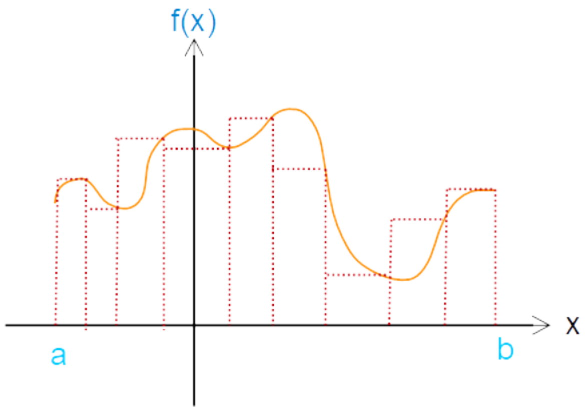
Remarque 3.2

- *Il existe une infinité de subdivisions possibles pour un même intervalle ;*
- *Les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ n'ont pas nécessairement la même taille.*

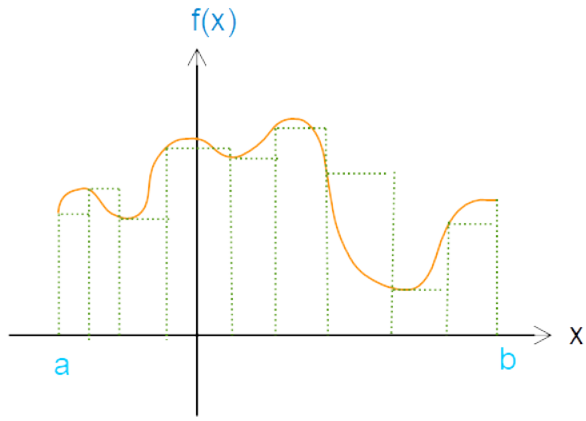
Sur un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on note $m_i = f(x_i)$ (valeur de la fonction “à gauche”) et $M_i = f(x_{i+1})$ (valeur de la fonction “à droite”) *(voir schéma précédent).*

La subdivision s'apparente à remplacer sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la fonction par une fonction en escalier :

Soit par la valeur "à gauche" :
$f(x_i < x < x_{i+1}) = m_i$

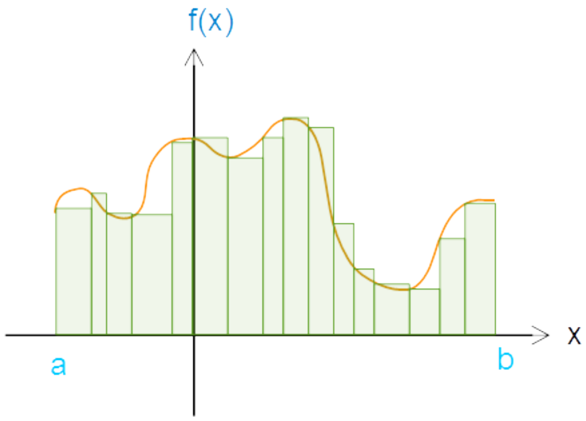


Soit par valeur "à droite" :
$f(x_i < x < x_{i+1}) = M_i$

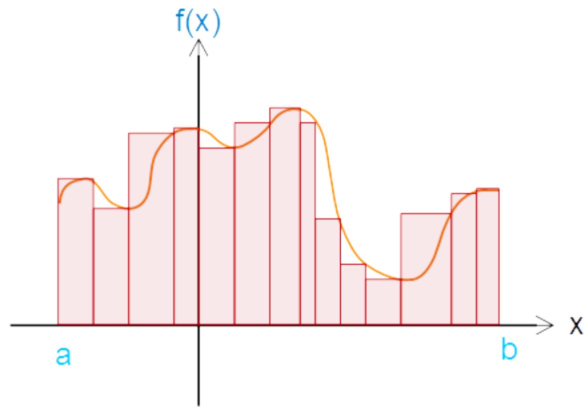


On définit alors les sommes suivantes, appelées sommes de Darboux :

$$s_\sigma = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) \times m_i$$



$$S_\sigma = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) \times M_i$$



Les sommes de Darboux sont les sommes des aires des rectangles correspondant à chaque marche.

1.3 Intégrale de Riemann

Si dans les sommes de Darboux on fait tendre n vers l'infini, la fonction en escalier précédente se confond avec la fonction f et les sommes de Darboux se rejoignent et se confondent avec l'aire sous la courbe.
La fonction f est dite **intégrable au sens de Riemann** si :

$$\lim_{n\to\infty} s_\sigma = \lim_{n\to\infty} S_\sigma$$

et alors on appelle **intégrale de la fonction f entre a et b** cette limite commune, et on la note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} s_\sigma = \lim_{n\to\infty} S_\sigma$$

Les fonctions monotones ou continues sur $[a\ ;\ b]$ sont toutes intégrables au sens de Riemann.

2 Primitive d'une fonction

2.1 Définition

Soit une fonction f continue sur un intervalle I contenant a.
On montre que $\forall x \in I$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et que sa dérivée est f.
On dit alors que F **est la primitive de** f **qui s'annule en** a.

Toutes les fonctions F définies sur I et dont la dérivée est f sont des primitives de f sur I :

$$F \text{ est une primitive de } f \iff \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$$

Comme la dérivée d'une constante est nulle, les primitives sont définies à une constante près, c'est-à-dire que si $F : x \mapsto F(x)$ est une primitive de f, alors pour toute constante k, la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est également une primitive.
Donc si f admet une primitive sur I, elle admet en fait une infinité de primitives sur I.

On note parfois les primitives de f avec la notation $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
La notation différentielle est très pratique dans la notion de primitive :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int^x \mathrm{d}F = F(x) + cste$$

Exemple 3.2
Les primitives de la fonction $f : x \mapsto 2x$ *peuvent être notées* $F(x) = \displaystyle\int^x 2t\,dt = x^2 + cste$.

2.2 Détermination des primitives d'une fonction

Pour déterminer la primitive d'une fonction f, on doit trouver une fonction dont la dérivée est f.

Exemple 3.3

1. *Les primitives de la fonction* $f_1 : x \mapsto 2x + \dfrac{1}{x^2}$ *sont les fonctions* F_1 *définies par :*

$$F_1 : x \mapsto x^2 - \frac{1}{x} + k \quad ; \quad k = cste \in \mathbb{R}$$

2. *On cherche la primitive de la fonction* $f_2 : x \mapsto 4x^2$ *qui s'annule en* 1.
Les primitives de f_2 *sont toutes les fonctions* F_2 *définies par :*

$$F_2 : x \mapsto \frac{4}{3}x^3 + k \quad ; \quad k = cste \in \mathbb{R}$$

Il n'y en a qu'une seule qui s'annule en 1. *Pour que* F_2 *s'annule en* 1 *il faut*

$$F_2(1) = 0 \Longrightarrow \frac{4}{3} + k = 0 \Longrightarrow k = \frac{4}{3}$$

Donc la primitive de f_2 *qui s'annule en* 1 *est la fonction :*

$$F_2 : x \mapsto \frac{4}{3}\left(x^3 - 1\right)$$

2.2.1 Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$\int^x f(t)\mathrm{d}t$	Intervalle
$(x-a)^n$; $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + cste$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -1$
$\frac{1}{x-a}$; $a \in \mathbb{R}$	$\ln(\lvert x-a\rvert) + cste$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$\cos(a\,x)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\sin(a\,x) + cste$	$\mathbb{R}$
$\sin(a\,x)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a}\cos(a\,x) + cste$	$\mathbb{R}$
$\tan(a\,x)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(a\,x)\rvert + cste$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{cotan}(a\,x) = \frac{1}{\tan(a\,x)}$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\ln\lvert\sin(a\,x)\rvert + cste$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$1 + \tan^2(a\,x) = \frac{1}{\cos^2(a\,x)}$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\tan(a\,x) + cste$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{\sin^2(a\,x)}$; $a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a}\mathrm{cotan}(a\,x) + cste$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$e^{a\,x}$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}e^{a\,x} + cste$	$\mathbb{R}$
$\ln(a\,x)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$x(\ln(a\,x) - 1) = cste$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x^2+a^2}$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cste$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2-a^2}$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + cste = \mathrm{argth}(x) + cste$	$\mathbb{R} \setminus \sqrt{a}$
$\cosh(a\,x)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\sinh(a\,x) + cste$	$\mathbb{R}$
$\sinh(a\,x)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\cosh(a\,x) + cste$	$\mathbb{R}$
$\tanh(a\,x)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\ln\left(\cosh(a\,x)\right) + cste$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cosh(x)}$	$2\mathrm{cotan}\left(e^x\right) + cste$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sinh(x)}$	$\ln\left\lvert\tanh\frac{x}{2}\right\rvert + cste$	$\mathbb{R}^*$
$\mathrm{cotanh}(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$	$\ln\lvert\sinh x\rvert + cste$	$\mathbb{R}$
$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x) + cste$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$-\mathrm{cotanh}(x) + cste$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $a \in \mathbb{R}$	$\mathrm{argsinh}\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right) + cste = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) = cste$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $a \in \mathbb{R}$	$\arcsin\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right) + cste$	$]-a\ ;\ a[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$; $a \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} \mathrm{argcosh}\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right) + cste = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + cste & \text{si } x > \lvert a\rvert \\ -\mathrm{argsinh}\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right) + cste = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert + cste & \text{si } x < -\lvert a\rvert \end{cases}$	$]-\infty\ ;\ -\lvert a\rvert[\cup]\lvert a\rvert\ ;\ +\infty[$
$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$; $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ $p^2 - 4q < 0$	$\frac{a}{2}\ln\lvert X^2 + pX + q\rvert + \frac{b - \frac{ap}{2}}{\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}}\arctan\left(\frac{X + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}}\right) + cste$	$\mathbb{R}$

2.2.2 Opérations sur les primitives

Soient deux fonctions u et v et leurs dérivées u' et v' :

$f(x)$	$\int^x f(t)\mathrm{d}t$	Remarques / exemple
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x)$	
$u'(x) \times [u(x)]^n$; $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1} + cste$	$f(x)$: $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ $2x(x^2+5)^2$: $\dfrac{1}{3}(x^2+5)^3$ $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \cos x \sin^{-2} x$: $-\sin^{-1} x = -\dfrac{1}{\sin x}$
$\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^n}$; $n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$	$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{[u(x)]^{n-1}} + cste$	C'est un cas particulier de la primitive précédente pour $n < 0$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + cste$	$f(x)$: $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ $\dfrac{\sin x}{\cos x}$: $-\ln\lvert\cos x\rvert$ $dfrac2x - 1x^2 + x$: $\ln\lvert x^2 + x\rvert$
$u'(x) \times (v' \circ u)(x) = u'(x) \times v'(u(x))$	$v \circ u(x) = v(u(x))$	$f(x)$: $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ $2xe^{x^2}$: e^{x^2} $-\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$: $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
$v'(a\,x)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a} \times v(a\,x)$	Cas particulier du cas précédent avec $u(x) = a\,x$

Attention, la primitive d'un produit de fonction n'est pas le produit des primitives de chaque fonction !

3 Calcul d'une intégrale à partir des primitives

Soit une fonction f continue sur un intervalle I contenant a et b.
Soit F une des ses primitives.
Alors l'intégrale de f entre a et b se calcule grâce à la relation :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque 3.3
Comme on finit par faire une différence, le choix de la primitive (c'est-à-dire le choix du terme constant) n'a pas d'importance.

Si la fonction f ne possède pas de primitives simples à calculer ou pas de primitive du tout, il faudra utiliser des méthodes de résolution numérique. Différents algorithmes existent, dont plusieurs utilisent la définition de l'intégrale et son interprétation comme la "somme des rectangles de la fonction en escalier".

Exemple 3.4

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times 0^3 = \frac{1}{3}$
- $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$
- $I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln\lvert x\rvert]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

4 Propriétés des intégrales

Soient deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$.

1 Linéarité :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$$

2 Relation de Chasles :

$$\forall c \in [a, b] \quad \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

3 Inversion des bornes :

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\, \mathrm{d}x$$

4 Relation d'ordre :

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in [a, b] \qquad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$$

$$m < f(x) < M \quad \forall x \in [a, b] \qquad \Rightarrow \quad m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x < M$$

5 Signe de l'intégrale des fonctions positive (resp. négatives) :

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \qquad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x > 0$$

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b] \qquad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x < 0$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \qquad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

6 Majoration de l'intégrale :

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

7 Valeur moyenne : La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est le nombre :

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

8 Commutation de l'intégrale :

- Intégration et puissance ne commutent jamais ;
- Intégration et valeur absolue ne commutent pas toujours ;
- A priori intégration et dérivation ne commutent pas.

5 Intégration par parties

5.1 Relation de l'IPP

Soient deux fonctions u et v définies, continues et dérivables sur l'intervalle $[a, b]$.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\quad & \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\quad & [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\quad & \underbrace{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}_{I} = [u(x)v(x)]_a^b - \underbrace{\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}_{J}
\end{aligned}$$

Donc si l'on reconnait sous l'intégrale le produit d'une fonction et de la dérivée d'une autre fonction, on peut utiliser cette dernière relation pour arriver à une intégrale plus simple à calculer.

5.2 Méthode

Soit à calculer une intégrale dans laquelle on reconnait le produit d'une fonction $u(x)$ et de la dérivée d'une autre fonction $v'(x)$:

$$I = \int_a^b u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}x$$

On place sur une même ligne les fonctions $u(x)$ et $v'(x)$, puis on déterminer la dérivée $u'(x)$ et la primitive $v(x)$:

$$\overbrace{\begin{array}{ccc} u(x) = ... & & v'(x) = ... \\ \downarrow & & \downarrow \\ u'(x) = ... & & v(x) = ... \end{array}}^{\text{Sous } I}$$

$$\underbrace{}_{\text{Sous } J}$$

On applique ensuite la relation précédente :

$$\underbrace{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}_{I} = [u(x)v(x)]_a^b - \underbrace{\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}_{J}$$

Exemple 3.5
On veut calculer $I = \int_0^\pi x\sin(x)\,dx$.
On reconnaît sous l'intégrale le produit de x *par* $\sin x$. *On pose :*

$$\begin{array}{ccc} u(x) = x & & v'(x) = \sin x \\ \downarrow & & \downarrow \\ u'(x) = 1 & & v(x) = -\cos x \end{array}$$

Donc $I = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\,dx = [-x\cos x]_0^\pi - [-\sin x]_0^\pi = \pi$

5.3 Choix des fonctions

La principale difficulté de l'intégration par partie est qu'il faut choisir dans le produit de fonction sous l'intégrale quelle sera la fonction u et quelle sera la fonction v'.

Ce choix requiert un peu d'intuition. Il faut en fait que la nouvelle intégrale qui apparait $J = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ soit plus simple à calculer que l'intégrale initiale $I = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 3.6
Pour l'intégrale de l'exemple précédent, si l'on fait l'autre choix, cela donne :

$$\begin{array}{ll} u(x) = \sin x & v'(x) = x \\ u'(x) = \cos x & v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

Alors $I = \left[\frac{x^2}{2}\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{x^2}{2}\cos x\, dx$.
On ne sait toujours pas calculer cette deuxième intégrale, et elle est même plus complexe que la première. Ce n'est donc pas le bon choix.

Il existe un moyen mnémotechnique pour se souvenir de l'ordre préférentielle pour la fonction à dériver (c'est-à-dire la fonction u dans la relation générale) : la méthode "**ALPES**" :

A	**L**	**P**	**E**	**S**
arccos	ln	Polynômes	exp	sin
arcsin	log			cos
arctan	$\log_a$			tan
Argcoch				cosh
Argsinh				sinh
Argtanh				tanh

On choisit en priorité pour la fonction à dériver u celle qui est **la plus à gauche** dans ce tableau.
Par exemple entre une fonction trigonométrique et un logarithme, on choisira le logarithme.

Exemple 3.7
Soit à calculer $I = \int_1^2 te^t\, dt$.
On a le choix entre un polynôme (t) et une exponentielle (e^t).
On choisit donc $u(t) = t$ *et* $v'(t) = e^t$ *:*

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{array}\right.$$

Donc $I = [te^t]_1^2 - \int_1^2 e^t\, dt = \left[te^t\right]_1^2 - \left[e^t\right]_1^2 = e^2$

6 Intégrales généralisées

6.1 Introduction

Nous nous sommes jusqu'ici limités aux calculs d'intégrales du type $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ dans le cas où la fonction f est continue sur $[a,b]$.
Ces intégrales sont appelées **intégrales définies**.

Les intégrales qui ne respectent pas cette condition sont appelées **intégrales généralisées**.

Il nous faut considérer les trois cas suivants :

- La fonction à intégrer n'est pas définie sur l'une des bornes d'intégration :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad a \notin \mathcal{D} \quad \text{ou} \quad b \notin \mathcal{D}$$

Exemple 3.8
$\displaystyle\int_0^2 \ln x\, dx$ *: la fonction* $\ln$ *n'est pas définie en* 0.

- La fonction à intégrer n'est pas définie en un ou plusieurs points c_i de l'intervalle d'intégration :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \exists c \in [a\ ;\ b] \quad \text{et} \quad c \notin \mathcal{D}$$

Exemple 3.9
$\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\, dx$ *: la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *n'est pas définie en* 0.

- On intègre jusqu'à une borne infinie :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.2 Convergence et divergence d'une intégrale

- Soit une fonction f définie et continue sur $[a,b[$ avec éventuellement $b=+\infty$.
  On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **converge** si $\displaystyle\left|\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| < +\infty$.

  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

- Soit une fonction f définie et continue sur $]a,b]$ avec éventuellement $a=-\infty$.
  On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **converge** si $\displaystyle\left|\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| < +\infty$.

  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

- Soit une fonction f définie et continue sur $]a,b[$ avec éventuellement $a=-\infty$ ou $b=\infty$.
  La définition de la convergence découle des deux conditions suivantes :
  On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **converge** si $\forall c \in]a,b[$ les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent.

  Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

6.3 Définition de l'intégrale généralisée

On considère une intégrale non définie. On peut généraliser la notion d'intégrale sur tout intervalle, à condition que l'intégrale converge, et alors l'intégrale est égale à la limite considérée :

- Soit une fonction f définie et continue sur $[a,b[$ avec éventuellement $b=+\infty$.
  Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors on peut généraliser la notion d'intégrale, et on a :
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\gamma\to b}\int_a^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Soit une fonction f définie et continue sur $]a,b]$ avec éventuellement $a=-\infty$.
  Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors on peut généraliser la notion d'intégrale, et on a :
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\gamma\to a}\int_\gamma^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Soit une fonction f définie et continue sur $]a,b[$ avec éventuellement $a=-\infty$ ou $b=\infty$.
  Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors on peut généraliser la notion d'intégrale, et on a :
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\gamma\to a}\lim_{\delta\to b}\int_\gamma^\delta f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 3.10

- $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}+1\right) = 1$
- $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}[e^x]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(1-e^a) = 1$

L'intégration par partie que l'on a vue pour les intégrales définies peut également être utilisée, mais il faut prendre des précautions pour que tous les nouveaux termes introduits soient définis.
Soit par exemple une fonction définie sur $[a,b[$. L'intégration par partie nous dit que :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

On a donc :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b}\left([f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{x\to b}[f(t)g(t)]_a^x - \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

à condition bien sûr que ces deux limites existent !

7 Exercices du chapitre 3

Exercice 3.1
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto x^4 + 3x - 1$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$
4. $f_4 : x \mapsto e^{-3x}$
5. $f_5 : x \mapsto \sin(2x - 1)$
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x}$
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+7}$
8. $f_8 : x \mapsto x\cosh(x^2)$
9. $f_9 : x \mapsto 2\sinh(x)\cosh(x)$
10. $f_{10} : x \mapsto \tanh(3x)$
11. $f_{11} : x \mapsto xe^{5x^2+1}$
12. $f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$
13. $f_{13} : x \mapsto \dfrac{2}{3x^2+5}$

Exercice 3.2
1. Tracer sur un même graphique les courbes des fonctions $f_1 = x \mapsto x^2$, $f_2 = x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 2$.
2. Calculer l'aire de la surface délimitée par ces quatre courbes et l'axe des abscisses.

Exercice 3.3
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^3 (x^2 + 3x - 1)\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^4 \frac{2t^3 + t^2 - 5t + 1}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_2^4 \frac{2t-1}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^\pi (\cos(2t) + \sin t)\,\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\sin(4x) - 5\cos x)\,\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^2 e^{3t+1}\,\mathrm{d}t$
8. $I_8 = \displaystyle\int_{-4}^4 \frac{1}{x^2+16}\,\mathrm{d}x$
9. $I_9 = \displaystyle\int_0^\pi (1 + 2\sin x)^2\,\mathrm{d}x$
10. $I_{10} = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
11. $I_{11} = \displaystyle\int_{-1}^2 |t|\,\mathrm{d}t$
12. $I_{12} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
13. $I_{13} = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{5x^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3.4
1. (a) Exprimer $\sin(x)\cos(3x)$ en fonction de $\sin(4x)$ et $\sin(2x)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(3x)\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\cos(4x)\mathrm{d}x$.

Exercice 3.5
On pose $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin t}{\cos t - \sin t}\mathrm{d}t$ et $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\cos t - \sin t}\mathrm{d}t$.
1. Calculer $A + B$ et $A - B$.
2. En déduire A et B.

Exercice 3.6
Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par partie :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (2t-4)e^t\mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^\pi 2t\sin t\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

5. $I_5 = \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x \mathrm{d}x$
6. $I_6 = \int_0^{\pi} e^{x} \cos x \mathrm{d}x$
7. $I_7 = \int_1^{e} \frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

Exercice 3.7
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \to \frac{\tan x}{\cos x}$
2. $f_2 : x \to \arcsin x$
3. $f_3 : x \to \frac{\arctan x}{x^2+1}$
4. $f_4 : x \to \frac{1}{x + x\ln^2 x}$
5. $f_5 : x \to \sin^2 x \cos^3 x$

Exercice 3.8
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1. $I_1 = \int_1^{4} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ avec le changement de variable $u = \sqrt{x}$.
2. $I_2 = \int_1^{2} \frac{e^x}{1+e^x} \mathrm{d}x$, en trouvant vous même le changement de variable !
3. $I_3 = \int_0^{1} \sqrt{-x^2+1} \mathrm{d}x$ avec le changement de variable $x = \sin u$.
4. $I_4 = \int_1^{e} \frac{\ln^n x}{x} \mathrm{d}x$ pour tout entier n, avec le changement de variable $u = \ln x$.

Exercice 3.9
Pour chacune des intégrales suivantes, donner le domaine de définition de la fonction sous l'intégrale, et la calculer si possible.

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} e^x \mathrm{d}x$
2. $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x$
3. $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x$
4. $I_4 = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$
5. $I_5 = \int_0^{1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$
6. $I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x$
7. $I_7 = \int_0^{1} \ln x \, dx$
8. $I_8 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \mathrm{d}x$

Exercice 3.10
Soit à calculer l'intégrale double suivante, où x et y sont deux variables indépendantes :

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=1}^{2} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Comme ces deux variables sont indépendantes, on commence par calculer l'intégrale selon y en considérant x constant :

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=1}^{2} xy^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \left(\left[\frac{xy^3}{3} \right]_{y=1}^{2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{8x - x}{3} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{7x}{3} \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Puis on intègre le résultat selon x :

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{7x}{3} \right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{7x^2}{6} \right]_{x=0}^{1} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

En prenant exemple sur le cas précédent, calculer :

1. $J = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin y \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$
2. $K = \int_{x=1}^{e} \int_{y=0}^{3} y \ln x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Exercice 3.11
(Cet exercice est inspiré d'un problème d'OSF (Semestre 2).

On considère un filtre conique d'angle θ.
On note $\overline{R}$ la résistance du support de filtration, ρ la masse volumique de l'eau et μ sa viscosité cinématique.

Les valeurs numériques sont les suivantes :

- $\overline{R} = 1,10.10^{10} m^{-1}$
- $\rho = 1,00.10^{3}\ kg.m^{-3}$
- $\mu = 1,00.10^{-3} Pa.s$
- $\theta = 80\ °$

Le volume est donné par :

$$V(t) = \frac{\pi h^3(t) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3} \qquad (1)$$

Le débit volumique est donné par :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi \rho g}{\mu \overline{R}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) h^3(t) \qquad (2)$$

1. Différencier la relation (1) afin d'exprimer dV en fonction de dh.
2. En utilisant les relations précédentes, exprimer dt en fonction de dh.
3. La hauteur initiale d'eau étant de $0,8\ m$, calculer le temps nécessaire pour que la hauteur d'eau atteigne 0,4 m.

Exercice 3.12
(Cet exercice est inspiré d'un TD de Dimensionnement et Opérations Unitaires de 2ème année).

Soit à calculer le NUT (Nombre d'Unités de Transfert) suivant :

$$\int_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} \frac{\mathrm{d}C}{-0,1C + 2,68 - C}$$

où C est la concentration, qui est de $0,8\ mol/m^3$ en entrée et de $2,36\ mol/m^3$ en sortie.

Calculer ce NUT.

Exercice 3.13
(Cet exercice est inspiré d'un TD de Réacteur de 2ème année).

On cherche à calculer la constante de vitesse à $25°C$ de la réaction d'hydrolyse alcaline de l'acétate d'éthyle ($CH_3COOC_2H_5$) par la soude en phase aqueuse :

$$CH_3COOC_2H_5\ +\ NaOH\ =\ CH_3COONa\ +\ C_2H_5OH$$

On note c_a la concentration en acétate d'éthyle et c_s la concentration de soude. Ces deux concentrations diminuent donc au cours du temps.
On se place dans les condition suivantes :

- Concentration initiale en soude : $c_{s0} = 68,2\ mol/m^3$
- Concentration initiale en acétate d'éthyle : $c_{a0} = 52,6\ mol/m^3$

Au bout de trente minutes on mesure une concentration en soude $c_{s30} = 49,7\ mol/m^3$.
On sait que la réaction est d'ordre 1, ce qui donne après un petit bilan stoechiométrique :

$$\frac{\mathrm{d}c_s}{\mathrm{d}t} = -kc_ac_s = -k(c_{a0} - c_{s0} + c_s).c_s$$

On cherche à déterminer la valeur de la constante k.

1. Montrer que l'on a $\mathrm{d}c_s\left(\dfrac{1}{c_s}-\dfrac{1}{c_{a0}-c_{s0}+c_s}\right)=-k(c_{a0}-c_{s0})\mathrm{d}t$.
2. Intégrer l'égalité précédente afin de déterminer k (qui a bien sûr une unité !).

Exercice corrigé 3.1
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1=\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 t\mathrm{d}t$
2. $I_2=\displaystyle\int_0^\pi (\sin^2 t+\cos t)\mathrm{d}t$

1. Soit à calculer $I_1=\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 t\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} & I_1=\int_0^\pi \cos^2 t\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow\quad & I_1=\int_0^\pi \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow\quad & I_1=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^\pi \\ \Longrightarrow\quad & \boxed{I_1=\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

2. Soit à calculer $I_2=\displaystyle\int_0^\pi (\sin^2 t+\cos t)\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} & I_2=\int_0^\pi (\sin^2 t+\cos t)\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow\quad & I_2=\int_0^\pi \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}+\cos t\right)\mathrm{d}t \\ \Longrightarrow\quad & I_2=\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}+\sin t\right]_0^\pi \\ \Longrightarrow\quad & \boxed{I_2=\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Exercice corrigé 3.2

1. Montrer que pour les fonctions f impaires définies sur un intervalle I, quel que soit $a\in I$, on a $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$.
2. Montrer que pour les fonctions f paires définies sur un intervalle I, quel que soit $a\in I$, on a $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

1. On décompose l'intégrale :

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x \quad = \quad \underbrace{\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x}_{I} \quad + \quad \underbrace{\int_0^a f(x)\mathrm{d}x}_{J}$$

Or si f est une fonction impaire, alors $\forall x\in I,\ f(-x)=-f(x)$.
Donc si on fait le changement de variable $u=-x$ dans la deuxième intégrale, on a :

$$J=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(-u)\mathrm{d}(-u)=\int_a^0(-f(u))(-\mathrm{d}(u))=\int_a^0 f(u)\mathrm{d}u=-\int_0^a f(u)\mathrm{d}u=-I$$

On a donc $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=I-I\Longrightarrow\boxed{\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0}$.

2. On part de l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x$.
Si f est une fonction paire, alors $\forall x\in I,\ f(-x)=f(x)$.
Donc si on fait le changement de variable $u=-x$, on a :

$$\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(-u)\mathrm{d}(-u)=\int_a^0(-f(u)\mathrm{d}u)\Longrightarrow\boxed{\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x}$$

Exercice corrigé 3.3
L'étude cinétique des réactions chimiques consiste à observer l'évolution de l'avancement de la réaction au cours du temps et de déterminer les vitesses de réaction.
Soit par exemple une réaction dont l'équation s'écrit :

$$a\,A+b\,B\rightarrow c\,C$$

On s'intéresse plus particulièrement au réactif A affecté du nombre stoechiométrique a.
On note $\xi(t)$ l'avancement de la réaction à un instant t, si bien que la quantité de matière du réactif A, notée $n_A(t)$, est donnée par :

$$n_A(t) = n_0 - a\xi(t)$$

où n_0 est la quantité de matière initialement introduite.

La **vitesse de la réaction** est définie par :

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$$

Si tous les autres réactifs sont introduits en excès, on montre que l'on peut dans de nombreux cas mettre cette vitesse sous la forme :

$$v(t) = k\left(n_A(t)\right)^\alpha$$

et alors on dit que la réaction est d'ordre α par rapport au réactif A.

1. Exprimer la vitesse de réaction en fonction de $\dfrac{\mathrm{d}n_A}{\mathrm{d}t}$.
2. En déduire que $\dfrac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^\alpha} = -ka\,\mathrm{d}t$.
3. Exprimer $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^\alpha}$ en fonction de $n_A(t)$, n_0 et α pour les trois cas $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.
4. En déduire $n_A(t)$ en fonction du temps et de n_0 pour chacun de ces trois cas.

1. $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{n_0 - n_A(t)}{a}\right) \Longrightarrow \boxed{v(t) = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{d}n_A}{\mathrm{d}t}}.$
2. $v(t) = k\left(n_A(t)\right)^\alpha = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\mathrm{d}n_A}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^\alpha} = -ka\mathrm{d}t}.$
3.
   - $\alpha = 0$:
     $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}n_A}{1} = \int_0^t \mathrm{d}n_A = [n_A]_0^t = n_A(t) - n_A(0) \Longrightarrow \boxed{\int_0^t \frac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^0} = n_A(t) - n_0}.$
   - $\alpha = 1$:
     $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}n_A}{n_A} = [\ln(n_A)]_0^t \Longrightarrow \boxed{\int_0^t \frac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^1} = \ln\left(\frac{n_A(t)}{n_0}\right)}.$
   - $\alpha = 2$:
     $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^2} = \left[-\frac{1}{n_A}\right]_0^t \Longrightarrow \boxed{\int_0^t \frac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^2} = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_A(t)}}.$
4. $\dfrac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^\alpha} = -ka\mathrm{d}t \Longrightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}n_A}{(n_A)^\alpha} = \left[-kat'\right]_0^t = -kat.$
   - $\alpha = 0$: $n_A(t) - n_0 = -kat \Longrightarrow \boxed{n_A(t) = n_0 - kat}$
   - $\alpha = 1$: $\ln\left(\dfrac{n_A(t)}{n_0}\right) = -kat \Longrightarrow \boxed{n_A(t) = n_0 e^{-kat}}$
   - $\alpha = 2$: $\dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{n_A(t)} = -kat \Longrightarrow \boxed{n_A(t) = \dfrac{n_0}{1 + n_0 kat}}$

Exercice corrigé 3.4
Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$

1. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
2. En déduire la dérivée de la fonction g définie sur $[0~;~1]$ par $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
3. Calculer I.

1. $f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}$
2. $g'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+2} + x}{(x + \sqrt{x^2+2})\sqrt{x^2+2}} \Longrightarrow \boxed{g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}}$
3. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^t g'(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_0^1 = g(1) - g(0) = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}) \Longrightarrow \boxed{I = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}$

Chapitre 4

Équations différentielles

4

1 Définition

Rappel :
Une *équation* est une égalité faisant intervenir une inconnue.
Résoudre l'équation, c'est déterminer la(les) valeur(s) de cette inconnue.

Exemple 4.1

- $x + 2 = 3$ *: équation du premier degré d'inconnue x*
- $t^2 + t - 2 = 0$ *: équation du second degré d'inconnue t*
- $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ *: système d'équations d'inconnues x et y*

On appelle **équation différentielle** une équation liant une fonction $f(x)$ à ses dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$,..., et éventuellement à d'autres fonctions.
Résoudre l'équation différentielle, c'est déterminer la fonction f.

Exemple 4.2

- (1) : $f''(x) - 2f(x) = 0$
- (2) : $2f'(x) - 2xf(x) = \cos(x)$
- (3) : $f'(x) - 3f(x) = 2$
- (4) : $f'(x) - f(x) = x$
- (5) : $f''(x) - 3f'(x) + 3xf(x) = 2x^2$
- (6) : $-f'(x) + f'' + 5f(x) = -4$

L'**ordre de l'équation différentielle** est l'ordre de la dérivée la plus élevée.

Le terme ne faisant pas intervenir f ou l'une de ses dérivées, et que l'on place souvent à droite de l'égalité, est appelé **second membre de l'équation.**

Le coefficient du terme d'ordre 2 est le coefficient devant $f''(x)$, le coefficient du terme d'ordre 1 est le coefficient devant $f'(x)$ et le coefficient d'ordre 0 est le coefficient devant $f(x)$.
Ces coefficients ne sont pas nécessairement des constantes, il peuvent dépendre de la variable x.

Dans le cas d'une équation différentielles d'ordre n, il y aura n **constantes d'intégration**. L'équation telle quelle a une infinité de solutions, et pour pouvoir donner une unique solution il faut disposer de n conditions aux limites qui permettront de déterminer ces constantes.

2 Équations différentielles du premier ordre

2.1 Équations différentielles du premier ordre sans second membre

2.1.1 Méthode générale

La forme générale d'une équation de ce type est :

$$f'(x) - a(x) \times (f(x))^n = 0 \quad \text{où } a \text{ est une fonction de } x \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

On peut la réécrire :

$$f'(x) = a(x) \times (f(x))^n$$

Pour la résoudre, on procède de la manière suivant :

- On exprime $\dfrac{f'(x)}{f^n(x)}$: $\dfrac{f'(x)}{f^n(x)} = a(x)\,;$
- On intègre à gauche et à droite de l'égalité :

$$\int^x \frac{f'(x)}{f^n(x)}\,\mathrm{d}x = A(x) + k \quad ; \quad k = cste$$

  Où l'on a noté $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

Les solutions n'ont pas la même forme suivant que $n = 1$ ou $n \neq 1$. Les deux cas sont détaillés ci-dessous.

2.1.2 1er cas : $n = 1$

Exemple introductif :
Résoudre l'équation différentielle $f'(x) - 2xf(x) = 0$ avec la condition aux limites $f(1) = 1$.

Forme générale des solutions :

$$f'(x) = a(x)f(x) \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = a(x) \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } f(x) \neq 0$$

On primitive à gauche et à droite de l'égalité :

$$\begin{aligned} & \ln|f(x)| = A(x) + k \quad ; \quad k = cste \quad (\textit{on rappelle que } A \textit{ est une primitive de } a) \\ \Leftrightarrow \quad & |f(x)| = e^{A(x)+k} = e^k \times e^{A(x)} \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) = \pm e^k \times e^{A(x)} \end{aligned}$$

On pose $K = \pm e^k = cste$.

Finalement :

$$\boxed{f(x) = Ke^{A(x)} \quad ; \quad K = cste}$$

La constante K se détermine grâce à la condition aux limites.

Exemple 4.3
Résoudre :

- $f'(x) - xf(x) = 0$ *avec* $f(0) = 3$
- $\dfrac{1}{2}f'(x) + \dfrac{1}{x}f(x) = 0$ *avec* $f(1) = 1$
- $f'(x) - \cos(3x)f(x) = 0$ *avec la condition aux limites* $f(0) = 10$

2.1.3 2ème cas : $n \neq 1$

Exemple introductif :

Résoudre l'équation différentielle $f'(x) - \dfrac{2}{x}\left(f(x)\right)^2 = 0$ avec la condition aux limites $f(1) = 1$.

Méthode générale de résolution :

$$f'(x) - a(x)\left(f(x)\right)^n = 0 \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f^n(x)} = a(x) \Longrightarrow f'(x) \times f^{-n}(x) = a(x) \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } f(x) \neq 0$$

On primitive à gauche et à droite de l'égalité :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{-n+1} f^{-n+1}(x) = A(x) + k \quad ; \quad k = cste \quad (\textit{on rappelle que } A \textit{ est une primitive de } a) \\
\Leftrightarrow \quad & f^{1-n}(x) = (1-n)\left(A(x) + k\right) \quad ; \quad k = cste \\
\Leftrightarrow \quad & \boxed{f(x) = \left[(1-n)\left(A(x)+k\right)\right]^{\frac{1}{1-n}} \quad ; \quad k = cste}
\end{aligned}$$

La constante k se détermine grâce à la condition aux limites.

Exemple 4.4
Résoudre :

- $f'(x) + xf^3(x) = 0$ *avec* $f(2) = \dfrac{1}{2}$
- $f'(x) = \dfrac{2x^3}{f(x)}$ *avec* $f'(1) = 2$

2.2 Équations différentielles du premier ordre avec second membre, avec $n = 1$

Exemple introductif

Résoudre l'équation différentielle $f'(x) + f(x) = e^{-x}$ avec $f(0) = 0$.

Méthode générale

Ces équations ont la forme générale :

$$f'(x) - a(x)f(x) = b(x) \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des fonctions de } x$$

On utilisera la méthode de variation de la constante pour résoudre ces équations.

1ère étape : On résout l'équation différentielle sans second membre $f'(x) - a(x)f(x) = 0$, en remplaçant la constante d'intégration par une fonction de x, que l'on notera $C(x)$:

$$f(x) = C(x)e^{A(x)}$$

2ème étape : On reprend l'équation complète et on la réécrit avec la solution précédente :

$$\begin{aligned}
& f'(x) - a(x)f(x) = b(x) \\
\Longrightarrow \quad & C'(x)e^{A(x)} + C(x)a(x))e^{A(x)} - a(x)C(x)e^{A(x)} = b(x) \\
\Longrightarrow \quad & C'(x)e^{A(x)} = b(x)
\end{aligned}$$

On arrivera toujours avec cette méthode à éliminer $C(x)$ et à n'avoir plus que $C'(x)$.

3ème étape : On isole $C'(x)$:

$$\begin{aligned}
& C'(x)e^{A(x)} = b(x) \\
\Longrightarrow \quad & C'(x) = b(x)e^{-A(x)}
\end{aligned}$$

4ème étape : On intègre l'expression précédente de façon à exprimer $C(x)$, à une constante d'intégration k près.
On aura alors déterminé la forme générale de f en remplaçant $C(x)$ dans l'expression de $f(x)$ trouvée à l'étape 1 :

$$\boxed{f(x) = e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} \mathrm{d}x}$$

5ème étape : On utilise la condition aux limites pour déterminer la constante d'intégration k.

Exemple 4.5

- *Résoudre l'équation différentielle* $f'(x) - xf(x) = -x$ *avec la condition aux limites* $f(0) = 5$.
- *Résoudre l'équation différentielle* $\frac{1}{3}f'(x) + \frac{2}{3x}f(x) = \cos(x^3)$ *avec la condition aux limites* $f\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right) = 0$.

3 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

3.1 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants sans second membre

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0 \qquad a\ ;\ b\ ;\ c = cstes$$

3.1.1 Équation caractéristique

On définit le polynôme caractéristique de l'équation, noté $K(r)$:

$$K(r) = ar^2 + br + c$$

La forme générale des solutions de l'équation différentielle dépend des solutions de l'équation :

$$K(r) = 0$$

Il faut donc calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et distinguer les trois cas $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ et $\Delta = 0$.

3.1.2 Premier cas : $\Delta > 0$

Alors $K(r)$ a deux racines simples réelles :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Et les solutions de l'équation différentielle sont :

$$\boxed{f(x) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x} \quad ; \quad A_1, A_2 = cstes}$$

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées grâce aux conditions aux limites.

Exemple 4.6

Résoudre l'équation différentielle $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$ *avec les conditions aux limites* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 1$.

3.1.3 Deuxième cas : $\Delta < 0$

Alors $K(r)$ a deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Et les solutions de l'équation différentielle peuvent s'écrire de trois manières (qui sont équivalentes) :

$$\boxed{f(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right)\right] \quad ; \quad A, B = cstes}$$

$$\text{ou} \quad f(x) = A_1 e^{z_1 x} + A_2 e^{z_2 x} = e^{-\frac{b}{2a}x}\left[A_1 e^{\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}x} + A_2 e^{-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}x}\right] \quad ; \quad A_1, A_2 = cstes$$

$$\text{ou} \quad f(x) = A_0 e^{-\frac{b}{2a}x}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x + \phi\right) \quad ; \quad A_0 \; ; \; \phi = cstes$$

Où les constantes sont déterminées grâce aux conditions aux limites.

On remarquera que dans les expressions précédente, $-\dfrac{b}{2a}$ est la partie réelle des racines et $\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ est la valeur absolue de leur partie imaginaire.

Exemple 4.7
Résoudre l'équation différentielle $f''(x) + 6f'(x) + 13f(x) = 0$ avec les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.

3.1.4 Troisième cas : $\Delta = 0$

Alors $K(r)$ a une racine double :

$$r_0 = \frac{-b}{2a}$$

Et les solutions de l'équation différentielle sont :

$$\boxed{f(x) = (A_1 + A_2 x)e^{r_0 x} \quad ; \quad A_1, A_2 = cstes}$$

Les constantes A_1 et A_2 sont déterminées grâce aux conditions aux limites.

Exemple 4.8
Résoudre l'équation différentielle $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$ avec les conditions aux limites $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

3.2 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants avec second membre

Soit l'équation différentielle suivante pour la fonction f :

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = u(x) \quad \text{où} \quad a, b, c = cstes \quad \text{et } u \text{ est une fonction connue}$$

Toutes les solutions de cette équation sont de la forme :

$$f(x) = f_s(x) + f_p(x)$$

où $f_s(x)$ est une solution générale de l'équation différentielle sans second membre et $f_p(x)$ une solution particulière de l'équation complète.

On trouve f_s en résolvant l'EDSSM, ce que l'on sait faire (*voir partie précédente*).

Il nous reste à déterminer la solution particulière f_p, qui dépend bien évidemment du second membre $u(x)$. On la trouve en la devinant ou en utilisant la méthode générale présentée ci-dessous.

3.2.1 1er cas : $u(x) = P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n

On distingue trois cas selon les valeurs de b et c :

- Si $c \neq 0$, alors f_p est un polynôme de degré n ;
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors f_p est un polynôme de degré $n+1$;
- Si $c = b = 0$, alors f_p est un polynôme de degré $n+2$.

f_p étant solution de l'équation complète, les coefficients du polynôme f_p sont à déterminer par identification en remplaçant f par f_p dans l'équation différentielle complète.

Exemple 4.9
Résoudre :

- $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 5 - 2x$ *avec* $f(0) = f'(0) = 0$
- $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 1 - 2x$ *avec* $f(0) = 4$ *et* $f'(0) = 1$
- $f''(x) + 2f'(x) = 4x + 2$ *avec* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 0$

3.2.2 2è cas : $u(x) = e^{mx}P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{R}$

Alors la solution particulière est de la forme $f_p(x) = e^{mx}Q_p(x)$ où Q est un polynôme de degré p.
On distingue trois cas selon si m est une racine du polynôme caractéristique K et selon la multiplicité de cette racine.

- Si $K(m) \neq 0$ (c'est-à-dire que m n'est pas une racine de K), alors $p = n$: $f_p = e^{mx}Q_n(x)$
- Si m est une racine simple de K, alors $p = n+1$: $f_p = e^{mx}Q_{n+1}(x)$
- Si m est une racine double de K, alors $p = n+1$: $f_p = e^{mx}Q_{n+2}(x)$

f_p étant solution de l'équation complète, les coefficients du polynôme Q sont à déterminer par identification en remplaçant f par f_p dans l'équation différentielle complète.

Exemple 4.10
Résoudre $f''(x) - f(x) = (1+x)e^{2x}$ *avec* $f(0) = f'(0) = 3$

3.2.3 3è cas : g est de la forme $g(x) = e^{kx}P(x)\sin(\alpha x)$ ou $g(x) = e^{kx}P(x)\cos(\alpha x)$ où P est un polynôme de degré n

On met $\cos(\alpha x)$ et $\sin(\alpha x)$ sous la forme d'une exponentielle complexe, et on résout avec la même méthode que précédemment.

Exemple 4.11
Soit à résoudre l'équation différentielle :

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = e^{-x}\sin x \qquad (*)$$

1. *Montrer que* $e^{-x}\sin x = \frac{1}{2i}e^{(-1+i)x} - \frac{1}{2i}e^{-(1+i)x}$.
2. *Montrer que si :*

$$f_1 \text{ est solution de l'équation } f_1''(x) + 2f_1'(x) + 2f_1(x) = \frac{1}{2i}e^{(-1+i)x} \qquad (1)$$

et si f_2 *est solution de l'équation :*

$$f_2''(x) + 2f_2'(x) + 2f_2(x) = -\frac{1}{2i}e^{-(1+i)x} \qquad (2)$$

alors la fonction $f = f_1 + f_2$ *est solution de* $(*)$.

3. *Vérifier que la fonction* $f_{10}(x) = -\dfrac{x}{4}e^{(-1+i)x}$ *est une solution particulière de* (1) *et donner la forme générale de* f_1.
4. *En déduire la forme générale de* f_2.
5. *Résoudre finalement* $(*)$ *avec les conditions initiales* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 0$.

4 Exercices du chapitre 4

Exercice 4.1
Résoudre :

1. $f'(x) - 4f(x) = 0$ avec $f(0) = 2$
2. $tf'(t) - 2f(t) = 0$ avec $f(1) = 3$
3. $f'(t) + (f(t))^2 = 0$ avec $f'(0) = -1$
4. $f'(t)f(t) - 2(f(t))^3 = 0$ avec $f(1) = 1$
5. $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x$ avec $y(1) = 4$ sur $\mathbb{R}_+$
6. $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + x(t) = te^{-t}$ avec $x(0) = 1$
7. $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + x(t) = t^3$ avec $x(0) = 5$

Exercice 4.2
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $f''(t) + 3f'(t) - 4f(t) = 0$ avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.
2. $x''(t) - 16x'(t) + 100x(t) = 0$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 24$.
3. $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0$ avec $f(0) = 10$ et $f'(0) = \frac{3}{4}$.
4. $-f''(t) + 9f(t) = 0$ avec $f(0) = 3$ et $f'(0) = 3$.
5. $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
6. $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 2$
7. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 3$
8. $3y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 4.3
Résoudre les équations différentielles suivantes, où y est une fonction de x :

1. $y'' + 4y' - 5y = 10$ avec $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' + 4y' + 5y = 10x - 2$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$
3. $2y'' - 5y' - 3y = -3t^2 - 10t + 4$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$
4. $y'' + y' + y = e^{-x}(x^2 - 2x + 3)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

Exercice 4.4

1. On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :
$$y'(x) = y(x) \times \ln(y(x)) \quad ; \quad y(0) = e^2 \qquad (*)$$
   (a) Justifier que la fonction y est à valeurs positives.
   (b) On pose $z : x \mapsto z(x) = \ln(y(x))$.
   Calculer $z'(x)$, établir l'équation différentielle à laquelle obéit z et la résoudre.
   (c) En déduire la fonction y solution de l'équation $(*)$.
2. On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+$:
$$2xf'(x) + f(x) + x^2 f^3(x) = 0$$
   (a) On considère la nouvelle fonction $g(x) = \dfrac{1}{f^2(x)}$.
   Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait g et la résoudre.
   (b) Déterminer $f(x)$.

Exercice 4.5
On cherche la loi donnant la température d'un corps se refroidissant dans un environnement dont la température ambiante est inférieure à sa température initiale.
On admet que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température de ce corps avec la température ambiante.
On note $\theta(t)$ la température de cet objet à l'instant t (exprimé en secondes) et θ_a la température ambiante.

On observe que dans une pièce où la température ambiante est maintenue à $20°C$, un objet chauffé à $100°C$ voit sa température chuter à $60°C$ en 10 minutes.

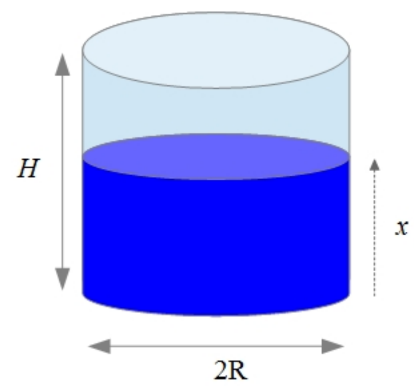
1. Montrer que $\theta(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \alpha(\theta(t) - \theta_a) \qquad \alpha = cste$$

2. Quels sont le signe et l'unité de α ?
3. Résoudre cette équation différentielle afin de déterminer $\theta(t)$.
4. Au bout de combien de temps l'objet aura-t-il atteint une température de $25°C$?

Exercice 4.6
Un réservoir cylindrique de hauteur $H = 2\ m$ et de rayon $R = 1\ m$ initialement plein se vide avec un débit volumique qui est proportionnelle à la hauteur x de liquide : $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \alpha\, x \quad ; \alpha = cste$ (le débit volumique est en $m^3.s^{-1}$).

1. Quel doit être le signe de α ?
2. Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit $x(t)$ et la résoudre.
3. Quelle limite voyez-vous à cette modélisation ? (C'est-à-dire quel problème présente cette solution ?)



Exercice 4.7
On souhaite déterminer l'expression de la température de l'eau $T(y)$ (en $°\ C$) dans un échangeur de chaleur cylindrique de longueur $L = 1\ m$.
Un bilan thermique sur un tronçon de tube permet d'aboutir à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}T(y)}{\mathrm{d}y} + 0,67\,(T(y) - T_a) = 0$$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- Température à l'entrée du tube : $T(0) = 80°C$
- Température ambiante : $T_a = 5°C$

1. Déterminer $T(y)$.
2. Calculer la température à la sortie de l'échangeur.

Exercice 4.8
On considère un objet de masse m qu'on lâche sans vitesse initiale d'une hauteur h, et qui tombe verticalement.
On note $z(t)$ l'altitude (en mètres) à l'instant t (l'instant $t = 0$ correspondant au moment où on le lâche).
Si l'on néglige tout frottement, l'altitude z obéit à l'équation différentielle suivant :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -mg$$

Où $g = 9,81 kg.m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

1. Donner l'expression des deux conditions initiales.
2. Résoudre cette équation différentielle.

3. Dans ces conditions, en combien de temps un marteau de 2 kg tombe-t-il d'une hauteur de 50 cm ? Et une plume de 20 g ?
4. Pourquoi ce résultat est-il étonnant ? A quoi est-ce dû ?

Exercice corrigé 4.1

$y'(x) + 2y(x) = x^2 \quad ; \quad y(0) = 0$

$y'(x) - y(x) = e^x(x+1) \quad ; \quad y(0) = -3$

$(x^2+1)y'(x) + 2xy(x) + 1 = 0 \quad ; \quad y(1) = -\dfrac{1}{2}$

$y'(x)\sqrt{x^2+1} - y(x) = 1 \quad ; \quad y(0) = 0$

1. $\boxed{y(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{4} + \dfrac{x^2-x}{2}}$
2. $\boxed{y(x) = e^x\left(\dfrac{x^2}{2} + x - 3\right)}$
3. $\boxed{y(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}}$
4. $\boxed{y(x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1}$

Exercice corrigé 4.2
Donner la solution f de chacune des équations différentielles suivantes.
Aucune justification n'est exigée.

Équation différentielle	**Solution**
$f'(x) + 6xf(x) = 0 \quad ; \quad f(0) = 3$	
$f'(x) + 6xf(x) - 6x = 0 \quad ; \quad f(0) = 3$	
$f''(x) - 4f'(x) - 5f(x) = 0 \quad ; \quad f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 6$	

Équation différentielle	Solution
$f'(x) + 6xf(x) = 0 \quad ; \quad f(0) = 3$	$f(x) = 3e^{-3x^2}$
$f'(x) + 6xf(x) - 6x = 0 \quad ; \quad f(0) = 3$	$f(x) = 2e^{-3x^2} + 1$
$f''(x) - 4f'(x) - 5f(x) = 0$ avec $; \quad f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 6$	$f(x) = e^{5x} - e^{-x}$

Exercice corrigé 4.3
On considère un circuit RLC série en régime libre (pas de générateur).
Alors la tension u aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

Où $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Le condensateur est initialement chargé à une tension E et l'intensité $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ est initialement nulle.

Les composants sont tels que $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Déterminer $u(t)$.

Vous pourrez poser $\lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q}$ *et* $\Omega = \dfrac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}$.

1. Équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$.
   La discriminant est $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2(1-4Q^2)$.
   Il faut déterminer le signe de Δ :
   $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \Rightarrow Q > \dfrac{1}{2} \Rightarrow 4Q^2 > 1 \Rightarrow 1 - 4Q^2 < 0 \Rightarrow \Delta < 0$.
   On a donc $\Delta = \left(i\dfrac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2-1}\right)^2$ et il y a deux racines :

   $$r_1 = \frac{\omega_0(1 + i\sqrt{4Q^2-1})}{2Q} \text{ et } r_2 = \frac{\omega_0(1 - i\sqrt{4Q^2-1})}{2Q}$$

   Pour simplifier on pose $\lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \dfrac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}$.

   La solution est donc de la forme :

   $$u(t) = e^{\lambda t}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] \quad A\ ;\ B = cstes$$

   On en déduit :

   $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^{\lambda t}\left[(\lambda A + \Omega B)\cos(\Omega t) + (\lambda B - \Omega A)\sin(\Omega t)\right]$$

2. Les conditions initiales donnent :

   $$\left\{\begin{array}{l} u(0) = E \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = E \\ \lambda A + \Omega B = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = E \\ B = -\dfrac{\lambda A}{\Omega} = -\dfrac{\lambda E}{\Omega} \end{array}\right.$$

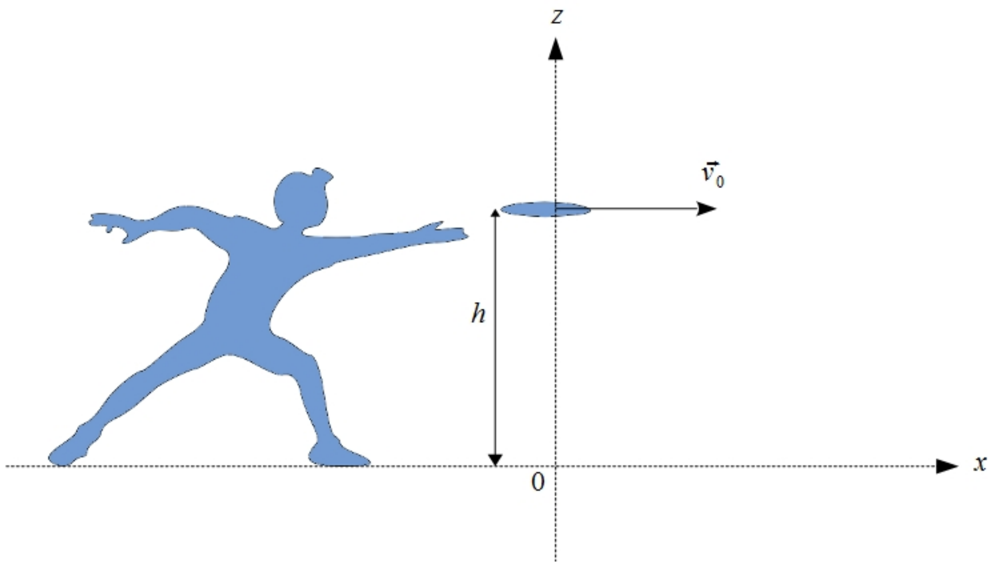
3. Finalement :

   $$\boxed{u(t) = Ee^{\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[\cos\left(\frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}t\right) - \frac{1}{2\sqrt{4Q^2-1}}\sin\left(\frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}t\right)\right]}$$

Exercice corrigé 4.4

On étudie le mouvement d'un frisbee lancé à l'horizontal.
A l'instant $t = 0$ il est lancé d'un point M de coordonnées $x(0) = 0$ et $z(0) = h$.
A tout instant t on note $v_x(t)$ la vitesse horizontale et $v_z(t)$ la vitesse verticale.
La vitesse verticale initiale est nulle : $v_z(0) = 0$.
La vitesse horizontale initiale vaut $v_x(0) = v_0$.

Ce frisbee a une masse $m = 0,175\ kg$.
Il est lancé dans l'air et le coefficient de frottement fluide est alors $\alpha = 0,02.10^{-3}\ kg.s^{-1}$.
On prendra l'accélération de la pesanteur égale à $g = 10\ m.s^{-2}$.



Alors la vitesse horizontale $v_x(t)$ en fonction du temps est régie par l'équation différentielle suivante :

$$v_x'(t) + \frac{\alpha}{m} v_x(t) = 0 \qquad (1)$$

Et la vitesse verticale $v_z(t)$ en fonction du temps est régie par l'équation différentielle suivante :

$$v_z'(t) + \frac{\alpha}{m} v_z(t) = g \qquad (2)$$

Dans ces équations différentielles :

1. $v_x'(t)$ est la dérivée temporelle de $v_x(t)$;
2. $v_z'(t)$ est la dérivée temporelle de $v_z(t)$;
3. α, m et g sont des constantes.

1. Résoudre l'équation différentielle (1) afin d'exprimer $v_x(t)$ en fonction des constantes v_0, m et α.
2. Résoudre l'équation différentielle (2) afin d'exprimer $v_z(t)$ en fonction des constantes α, m et g.
3. En déduire les expressions de $x(t)$ et $z(t)$.

1. L'équation (1) est une équation différentielle du premier ordre sans second membre :

$$\begin{aligned} & v_x'(t) + \frac{\alpha}{m} v_x(t) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & v_x'(t) = -\frac{\alpha}{m} v_x(t) \\ \Longrightarrow \quad & v_x(t) = ke^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad ; \quad k = cste \end{aligned}$$

   On utilise la condition initiale pour trouver k :
$$v_x(0) = v_0 \Longrightarrow k = v_0$$
   Finalement :
$$\boxed{v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}}$$

2. L'équation (2) est une équation différentielle du premier ordre avec second membre.
   On commence par résoudre l'équation différentielle sans second membre, qui est la même que l'équation (1). On obtient donc $v_z(t) = k(t)e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ où k est une fonction de t.

   On réinjecte cette solution dans l'équation complète :

$$\begin{aligned} & v_z'(t) + \frac{\alpha}{m} v_z(t) = g \\ \Longrightarrow \quad & k'(t)e^{-\frac{\alpha}{m}t} = g \\ \Longrightarrow \quad & k'(t) = ge^{\frac{\alpha}{m}t} \\ \Longrightarrow \quad & k(t) = \frac{gm}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{m}t} + a \quad ; \quad a = cste \\ \Longrightarrow \quad & v_z(t) = \frac{gm}{\alpha} + ae^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad ; \quad a = cste \end{aligned}$$

On utilise la condition initiale pour trouver a :

$$v_z(0) = 0 \Longrightarrow \frac{gm}{\alpha} + a = 0 \Longrightarrow a = -\frac{gm}{\alpha}$$

Finalement :

$$\boxed{v_z(t) = \frac{gm}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)}$$

3. (a) $v_x(t) = x'(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t} \Longrightarrow x(t) = -\frac{v_0 m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} + k \quad ; \quad k = cste.$
On utilise la condition initiale pour trouver k :

$$x(0) = 0 \Longrightarrow -\frac{v_0 m}{\alpha} + k = 0 \Longrightarrow k = \frac{v_0 m}{\alpha}$$

Donc finalement :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0 m}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)}$$

(b) $v_z(t) = z'(t) = \frac{gm}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) \Longrightarrow z(t) = \frac{gm}{\alpha}\left(t + \frac{m}{\alpha}e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) + k \quad ; \quad k = cste.$
On utilise la condition initiale pour trouver k :

$$z(0) = h \Longrightarrow g\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 + k = h \Longrightarrow k = h - g\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2$$

Donc finalement :

$$\boxed{z(t) = h + \frac{gm}{\alpha}t + g\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2\left(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1\right)}$$