IUT Lyon 1
l'excellence technologique
Département Génie Chimique
Génie des Procédés

Mathématiques

Première année - Semestre 2

Département de Génie Chimique, Génie des Procédés
IUT Lyon 1

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

1 Un exemple en thermodynamique : volume d'un échantillon de gaz parfait

On sait que pour un échantillon de gaz parfait de n moles, la pression P, le volume V, la température T et la quantité de matière n sont reliés par la relation :

$$PV = nRT \quad \text{où } R \text{ est la constante des gaz parfaits.}$$

On a donc :

$$V = \frac{nRT}{P}$$

La volume est donc une fonction de trois variables : n, P et T.
Le volume, la pression, la température et la quantité de matière étant des nombres réels positifs, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^3$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On note :

$$\begin{array}{cccl} V : & \mathbb{R}_+^3 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (n,T,P) & \mapsto & V(n,T,P) = \dfrac{nRT}{P} \end{array}$$

2 Fonction de plusieurs variables

2.1 Définition

Soient n variables x_i $(i \in \{1, 2, ..., n\})$.
Une fonction f de ces n variables est une relation qui à ces variables associe un unique nombre $f(x_1, x_2, .., x_n)$:

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \mapsto & F \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \to & f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

Si tous les x_i sont des réels, l'ensemble de départ E est une partie de $\mathbb{R}^n$.
L'ensemble d'arrivée F est une partie de $\mathbb{R}$.

Le domaine de définition de f est le produit des domaines de définition de f par rapport à chacune des variables. Si l'on note $\mathcal{D}_i$ le domaine de définition par rapport à la variable x_i :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times ...$$

On peut aussi noter :

$$\mathcal{D} = \{(x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...)\ ;\ x_1 \in \mathcal{D}_1\ ;\ x_2 \in \mathcal{D}_2\ ;\ ...\}$$

Pour alléger les notations on notera parfois $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ le n-upplet des variables, et $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Exemple 1.1

1. $f_1 : (x, y, z) \quad \mapsto \quad f_1(x, y, z) = |x + y - z|$
2. $f_2 : \quad (x, y) \quad \mapsto \quad f_2(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2 - 1}$
3. $f_3 : \quad (x, y, z) \quad \mapsto \quad f_3(x, y, z) = x + y - \dfrac{xy}{z}$
4. $f_4 : \quad (x, y) \quad \mapsto \quad f_4(x, y) = \sqrt{x - y}$

2.2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables

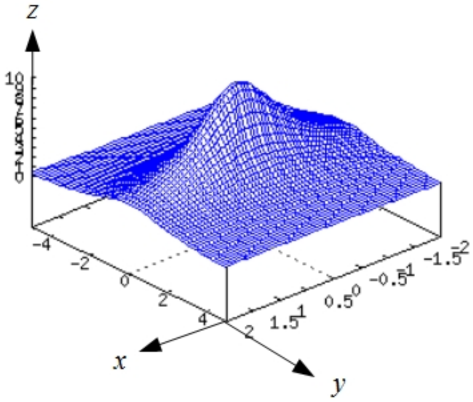
Soit une fonction f de deux variables x et y :

$$f : (x\ ;\ y) \mapsto z = f(x\ ; y)$$

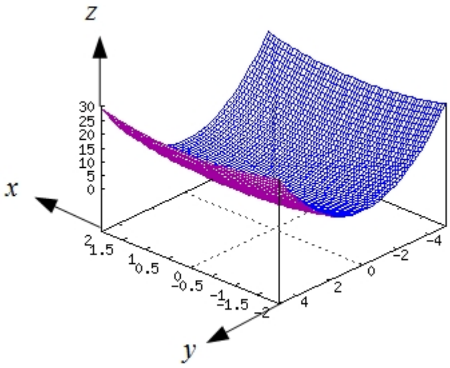
On peut représenter une telle fonction dans l'espace à trois dimensions : c'est la surface constituée des points de coordonnées $(x\ ; y\ ; z)$.

Exemple 1.2
Dans le repère en trois dimensions :

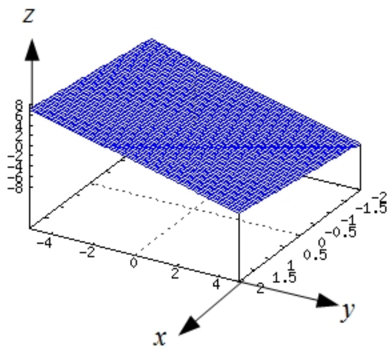
$$f : (x\ ;\ y) \mapsto \frac{10}{x^2+y^2+1}$$



$$f : (x\ ;\ y) \mapsto x^2+y^2$$



$$f : (x\ ;\ y) \mapsto x-y$$



3 Dérivées

3.1 Dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à l'une des variables

Soit une fonction f de n variables x_i.
On appelle **dérivée partielle de f par rapport à la variable** x_i et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ la fonction obtenue en dérivant f par rapport à x_i, toutes les autres variables étant considérées comme des constantes.

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_i,...,x_n) = \lim_{f\to 0} \frac{f(x_1,...,x_i+h,...,x_n)-f(x_1,...,x_i,...,x_n)}{h}$$

Pour bien signifier que les autres variables sont constantes, on les met parfois en indice :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_{j\neq i}}$$

Remarque :
Dans le cas d'une fonction d'une seule variable, on ne note pas $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, mais $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Exemple 1.3
Déterminer les domaines de définition et calculer toutes les dérivées partielles des fonctions suivantes :

- $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x+y+z$

- $g : (x,y) \mapsto g(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2-1}$
- $(n,T,P) \mapsto V = \dfrac{nRT}{P}$

3.2 Dérivées partielles d'ordres supérieur

On se limite dans la définition à une fonction de deux variables, les définitions se généralisant à des fonctions de plus de deux variables.
Soit une fonction $f : x \mapsto f(x,y)$.
On peut à priori définir quatre dérivées partielles secondes :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

Mais on montre que l'on a toujours $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Les dérivées partielles d'ordre n se calculent de la même manière à partir des dérivées partielles d'ordre $n-1$.

Exemple 1.4
Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions de l'exemple précédent.

3.3 Différentielle

La différentielle d'une fonction f, notée $\mathrm{d}f$, représente la variation infinitésimale de $f(x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...\ ;\ ; x_n)$ résultant des variations inifinitésimales $\mathrm{d}x_i$ de chacune des variables : si chaque variable x_i varie de $\mathrm{d}x_i$, alors le nombre $f(x_1, x_2, ...)$ varie de $\mathrm{d}f$.

Soit une fonction f de n variables x_i.
La différentielle de f est donnée par :

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

Exemple 1.5
Déterminer les différentielles des fonctions précédentes.

4 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation faisant intervenir les différentes dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

On ne traitera que des exemples.

4.1 Exemple 1

On cherche la fonction $f(x,y)$ obéissant aux système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3y^2 & (2) \\ f(1,0) = 0 & (3) \\ f(0,0) = 1 & (4) \end{cases}$$

4.2 Exemple 2

On cherche la fonction $f(x, y)$ obéissant aux système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy & (2) \\ f(0,0) = 3 & (3) \end{cases}$$

4.3 Exemple 3

On cherche la fonction $f(x, y)$ obéissant au système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f(x,y) = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos(x) & (2) \\ f(0,0) = 3 & (3) \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right) = 4 & (4) \end{cases}$$

5 Intégrales multiples

5.1 Exemple introductif

Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\pi} \int_{z=-1}^{2} xz^2 \sin(y) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

5.2 Méthode générale

Soit à calculer l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables **indépendantes** :

$$I = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{b_2} ... \int_{x_n=a_n}^{b_n} f(x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_n) \, \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}x_{n-1} ... \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1$$

Cette intégrale se calcule en calculant successivement les intégrales par rapport à chacune des variable, en gardant les autres constantes :

- On commence par intégrer selon x_n, et on a alors une fonction qui ne dépend plus de x_n :

  $$g(x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_{n-1}) = \int_{a_n}^{b_n} f(x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_n) \, \mathrm{d}x_n$$

  l'intégrale I se réécrit alors :

  $$I = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} ... \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} g(x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_{n-1}) \, \mathrm{d}x_{n-1} ... \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1$$

- On intègre ensuite selon x_{n-1}, et on a alors une fonction qui ne dépend plus de x_{n-1} :

  $$h(x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_{n-2}) = \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} g(x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_{n-1}) \, \mathrm{d}x_{n-1}$$

  l'intégrale I se réécrit alors :

  $$I = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} ... \int_{a_{n-2}}^{b_{n-2}} h(x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_{n-2}) \, \mathrm{d}x_{n-2} ... \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1$$

- etc

L'ordre d'intégration n'a pas d'importance.

6 Exercices du chapitre 1

Exercice 1.1
Soient les fonctions suivantes :

- $f_1(x,y) = 3x + 2y$
- $f_2(x,y,z) = \dfrac{xy^2}{z}$
- $f_3(x,y) = \ln(x+z)$
- $f_4(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$
- $f_5(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x}}{y} + z$
- $f_6(x,y) = \dfrac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}$
- $f_7(x,y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x-y}}$
- $f_8(x,y,z) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{yz}$
- $f_9(x,y,z) = (x-1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{(z-9)^2}$
- $f_{10}(x,y,z,t) = \dfrac{x+y}{z^2-4} + \sqrt{t}$

1. Déterminer leur ensemble de définition, et pour les fonctions de deux variables les représenter dans le plan.
2. Déterminer toutes les dérivées partielles de ces fonctions.

Exercice 1.2
En thermodynamique, les coefficients thermoélastiques d'un gaz sont définis par :

- Coefficient de compressibilité isotherme : $\chi_T = -\dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,n}$
- Coefficient de dilatation à pression constante : $\alpha = \dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,n}$
- Coefficient de variation de pression isochore : $\beta = \dfrac{1}{P}\left.\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,n}$

Donner les expressions des coefficients pour un gaz parfait en fonction de V, P, T, n et de la constante des gaz parfait R.

Exercice 1.3
1. Soit la fonction $f_1(x,y) = \dfrac{x}{y}$ où x et y sont fonction de t : $x(t) = t^2$ et $y(t) = \cos(2t)$.
   Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}$ en fonction de t.
2. Soit la fonction $f_2(x_1,x_2) = x_1 - x_2$ avec $x_1 = \cos(2y+z)$ et $x_2 = \dfrac{yz}{2}$.
   Déterminer $\dfrac{\partial f_2}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}$ en fonction de z et y.
   En déduire $\mathrm{d}f_2$
3. Soit $f_3(x) = e^{3x}$ avec $x(y,z) = \ln y - \ln z$.
   Déterminer $\dfrac{\partial f_3}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}$ en fonction de z et y.
   En déduire $\mathrm{d}f_3$

Exercice 1.4
1. Calculer les dérivée partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction $f(x,y,z) = xyz + x^2z + \dfrac{y}{z} - x^2y^3$.
2. Calculer les dérivée partielles d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction $g(x,y) = \cos(xy) - x^2y^5$.

Exercice 1.5
On s'intéresse à une barre métallique de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique c.
Cette barre est soumis à des variations periodiques de température avec une pulsation ω, si bien que sa temptérature T en fonction du temps t et de la position x sur la barre est donnée par la fonction :

$$T(x,t) = T_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x) \qquad \text{avec } \alpha = \sqrt{\frac{\omega\rho c}{2\lambda}}$$

Montrer que cette fonction obéit à l'équation de la chaleur à une dimension, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Exercice 1.6
Calculer les intégrales des fonctions suivantes sur le domaine $\mathcal{D}$:

1. $f_1(x\ ;\ y) = xy \quad \mathcal{D} = \{x \in [0\ ;\ 2]\ ;\ y \in [0\ ;\ 1]\}$
2. $f_2(x\ ;\ y) = x\cos(xy) \quad \mathcal{D} = \{x \in [0\ ;\ \pi]\ ;\ y \in [0\ ;\ 1]\}$

Exercice corrigé 1.1
Un élément infinitésimal de surface s'exprime comme $\mathrm{d}^2 S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.
Retrouver l'expression de l'aire d'un disque de rayon R, pour lequel $0 < r < R$ et $0 < \theta < 2\pi$:

$$S = \int_0^R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}^2 S$$

$$\mathcal{A} = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^R [\theta]_0^{2\pi}\ r\ \mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi r\ \mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = 2\pi\frac{R^2}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = \pi R^2}$$

Exercice corrigé 1.2
On s'intéresse à une barre métallique de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique c.
Cette barre est soumis à des variations periodiques de température avec une pulsation ω, si bien que sa temptérature T en fonction du temps t et de la position x sur la barre est donnée par la fonction :

$$T(x,t) = T_0 e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \alpha x) \qquad \text{avec } \alpha = \sqrt{\frac{\omega\rho c}{2\lambda}}$$

Montrer que cette fonction obéit à l'équation de la chaleur à une dimension, c'est-à-dire que :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- $\frac{\partial T}{\partial t} = \omega T_0 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \alpha x)$
- $\frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha T_0 e^{-\alpha x}\left(\sin(\omega t - \alpha x) + \cos(\omega t - \alpha x)\right)$
  $\Longrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha^2 T_0 e^{-\alpha x}\left(\sin(\omega t - \alpha x) + \cos(\omega t - \alpha x) + \cos(\omega t - \alpha x) - \sin(\omega t - \alpha x)\right) = 2\alpha^2 T_0 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \alpha x)$

On a donc :

$$T_0 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \alpha x) = \frac{1}{2\alpha^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2\alpha^2}{\omega}\frac{\partial T}{\partial t}$$

On calcule $\frac{2\alpha^2}{\omega} = \frac{2\omega\rho c}{2\lambda\omega} = \frac{\rho c}{\lambda}$

On a donc bien $\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}}$: cette température vérifie l'équation de la chaleur.

Chapitre 2

Résolution de systèmes linéaires

2

1 Définition d'un système d'équations

Un système d'équations est un ensemble d'équations faisant intervenir plusieurs **inconnues** dépendant les unes des autres.
Résoudre le système, c'est déterminer (si elles existent) toutes les valeurs possibles de ces inconnues.

Exemple 2.1
Le système suivant est un système de trois équations faisant intervenir les trois variables x, y et z :

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=2 \\ x+3y-2z=-1 \\ 3x+5y+8z=8 \end{array}\right.$$

2 Méthode par substitution

La méthode par substitution est peut-être la plus simple parce qu'elle est systématique, mais elle peut-être fastidieuse. Elle consiste à remplacer successivement chaque variable (ou *inconnue*) par son expression en fonction des autres, jusqu'à pouvoir exprimer une seule des variables indépendamment des autres.

Exemple 2.2
La résolution du système de l'exemple 1.1 peut se faire de la manière suivante :

- ***Première étape :*** *Dans la première équation on exprime l'une des variables, x par exemple, en fonction des deux autres variables. On remplace ensuite dans les deux autres équations*

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-2y-2z \\ 2-2y-2z+3y-2z=2+y-4z=-1 \\ 3(2-2y-2z)+5y+8z=6-y+2z=8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2(1-y-z) \\ y-4z=-3 \\ -y+2z=2 \end{array}\right.$$

- ***Deuxième étape :*** *On remplace maintenant dans la deuxième équation y en fonction de z*

$$\left\{\begin{array}{l} x=2(1-y-z) \\ y=-3+4z \\ 3-4z+2z=3-2z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2(1-y-z) \\ y=-3+4z \\ 2z=1 \end{array}\right.$$

- ***Troisième étape :*** *On peut maintenant donner les valeurs de toutes les variables, en partant de la troisième ligne et en remontant*

$$\boxed{\begin{cases} x = 2(1+1-\frac{1}{2}) = 3 \\ y = -3+4\frac{1}{2} = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}}$$

3 Méthode du Pivot de Gauss

La méthode du Pivot de Gauss permet de transformer le système initial en un autre système équivalent, ayant les mêmes solutions, mais qui est plus facile à résoudre. On cherche à obtenir un système dit *triangulaire*, c'est-à-dire dont une ligne ne contient qu'une variable, la deuxième ligne deux, etc.

Les opérations autorisées pour transformer le système sont les suivantes :

- **Échange de deux lignes**
- **Multiplication d'une ligne par un nombre non nul**
- **Addition d'un multiple d'une ligne au multiple d'une autre ligne**

L'idée de la méthode est d'isoler successivement chacune des variables.

Exemple 2.3
La résolution du système de l'exemple 1.1 peut se faire de la manière suivante :

$$\begin{cases} x+2y+2z &= 0 \quad (L_1) \\ y-4z &= -3 \quad (L_2' \to L_2 - L_1) \\ -y+2z &= 2 \quad (L_3' \to L_3 - 3L_1) \end{cases}$$

On a éliminé la variable x des lignes L_2 et L_3. Il faut maintenant par exemple éliminer la variable y de la troisième ligne, et alors on aura triangularisé le système.

$$\begin{cases} x+2y+2z &= 0 \quad (L_1) \\ y-4z &= -3 \quad (L_2') \\ -2z &= -1 (L_3'' \to L_3' + L_2') \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2y-2z = 3 \\ y = 4z-3 = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}}$$

On a déterminé les valeurs des trois variables : le système est résolu !

4 Changement de variable

Il peut arriver qu'un système ne fasse pas intervenir directement la variable x mais par exemple x^2, $\mid x \mid$, $\sqrt{x}$, etc. On doit alors faire un changement de variable.

Exemple 2.4
Résoudre le système $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^2-y^2 = 3 \end{cases}$

Remarque 2.1
Dans les problèmes concrets, selon le problème à résoudre, toutes les solutions ne seront pas "acceptables". Par exemple si x et y représentent une quantité de matière, x et y doivent nécessairement être positifs.

Remarque 2.2
Il faudra toujours faire bien attention aux domaines de définition des variables (notamment si on a des racines ou des inverses).

5 Écriture des solutions

Soit par exemple le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y = 3 \\ x^2 - y = -1 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $x = \pm 1$ et $y = 2$ (vérifiez-le !).

Il faut écrire toutes les solutions possibles pour le couple (x, y). On peut écrire ces solutions de deux manières :

- Sous la forme d'un système :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

- Sous la forme des couples (x, y) :

$$(x, y) \in \{(1, 2); (-1, 2)\}$$

  Quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, l'ordre alphabétique prévaut et on peut noter :

$$\mathcal{S} = \{(1, 2); (-1, 2)\}$$

6 Un système a-t-il toujours une solution ?

On dit qu'un système peut être résolu s'il a un nombre fini de solutions.
C'est le cas des systèmes précédents.

Il existe deux autres cas : les systèmes avec une infinité de solutions et les système sans solution.

6.1 Systèmes sans solutions

Il s'agit des systèmes dont deux lignes au moins sont incompatibles, ce qui conduit à plusieurs valeurs contradictoires pour une même variable, ou à des absurdités.

Exemple 2.5
Montrer que le système suivant n'a aucune solution :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Il est facile de déterminer si un système linéaire 2×2 a une solution en calculant son déterminant.
Soit le système suivant, où les inconnues sont x et y :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $\det S = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ et le système a une unique solution si et seulement si $\det S \neq 0$.

6.2 Systèmes linéaires avec une infinité de solutions

Ce sont les systèmes qui ont plus d'inconnues que d'équations.
Si un système comporte p inconnues et n équations avec $n < p$, alors on peut souvent exprimer n inconnues en fonction des $p - n$ autres, qui sont alors appelée *paramètres*.

Exemple 2.6
Déterminer l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

7 Exercices du chapitre 2

Exercice 2.1
Résoudre si possible les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = -9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x - 30y = \dfrac{15}{2} \\ \dfrac{2}{3}x - 4y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 3y = -2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 3y = 64 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y + 2z - 4t = 4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 10y - 3z = -1 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y - 3z = -\dfrac{7}{2} \\ -6x + 2y + 5z = \dfrac{19}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = -3 \\ x + 3y - z = -1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - 4y = 1 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 3y + 4z = 13 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x - 30y = \dfrac{15}{2} \\ 2x + 2y + 4z = -3 \\ \dfrac{3}{2}x - 4y = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y + 2z - 4t = 4 \\ x - 3y + z - 2t + 13 = 0 \\ 2x + 2y - z + t = 0 \\ 3x + y + 3z + 2t - 4 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + 3z - 4t = 16 \\ 3x + 2y + z + 4t = 15 \\ x + y + 3z + 4t = 3 \\ 4x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

Exercice 2.2
Résoudre les systèmes suivants en utilisant un changement de variable :

1. $\begin{cases} 7x^2 - 9y^2 = 5 \\ -3x^2 + 5y^2 = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7|x| - 9|y| = 5 \\ -3|x| + 5|y| = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{7}{y+1} = 3 \\ \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{9}{y+1} = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2\sqrt{x} + 2\sqrt{y+1} = 3 \\ -\sqrt{4x} + 3\sqrt{y+1} = 13 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{4x} + 3\sqrt{y+1} = 13 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -|x| + 7\sqrt{y+1} = 3 \\ -5|x| + 9\sqrt{y+1} = 2 \end{cases}$

Exercice 2.3
Trouver une fraction telle que si on ajoute 3 à chacun de ses termes, on obtient une fraction égale à $\dfrac{4}{5}$ et

que, si on retranche 3 à chacun de ses termes, on obtient une fraction égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 2.4
Le périmètre d'un champ rectangulaire est de 260 m. Si l'on augmente la plus petite dimension de 10 m et que l'on diminue la plus grande de 10 m, l'aire du champ augmente de 200 m^2.

Calculer les dimensions du champ.

Exercice 2.5
On considère un repère cartésien à deux dimensions dans lequel chaque point est repéré par ses coordonnées (x, y).
On cherche le point d'intersection des deux droites suivantes :
- (D_1) d'équation $3x + y = -1$
- (D_2) d'équation $-4x + 2y = 8$

1. Trouver les coordonnées de ce point en résolvant un système d'équation.
2. Vérifier graphiquement votre solution.

Exercice corrigé 2.1
Jean possède 5800 euros de plus que Jacques. Jean dépense les $\frac{4}{9}$ de son avoir et Jacques les $\frac{2}{5}$ du sien. Il reste alors à Jean deux fois plus d'argent qu'à Jacques.
Combien chacun possédait-il ?

On note x la somme d'argent de Jean et y celle de Jacques. x et y vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x = y + 5800 \\ \\ \frac{5}{9}x = 2\frac{3}{5}y \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} y = 5000 \text{ euros} \\ x = 10800 \text{ euros} \end{array}\right.}$$

Exercice corrigé 2.2
Un rayon de bibliothèque de $1,5$ m de long est entièrement occupé par 38 livres rangés côte à côte. Certains livres ont 3 cm d'épaisseur, les autres ont 5 cm d'épaisseur.
Quel est le nombre de livres de chaque épaisseur ?

On note x le nombre de livres de 3 cm d'épaisseur et y le nombre de livres de 5 cm d'épaisseur.

On a : $\left\{\begin{array}{l} x + y = 38 \\ 3x + 5y = 159 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 18 \\ y = 20 \end{array}\right.}$

Chapitre 3

Polynômes

1 Introduction

Vous avez déjà rencontré au lycée les **fonctions polynômiales**. Ce sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

Exemple 3.1
$x \mapsto x^2 + 2x^3 + 7$

On se place dans tout ce chapitre dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ou des nombres complexes $\mathbb{C}$.
On donnera donc en général les définitions dans $\mathbb{C}$, mais gardez bien en tête que l'on inclut alors l'ensemble des réels !

2 Définitions

Soit un ensemble $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, ...$).
On appelle **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute expression de la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \quad \text{avec } \forall k a_k \in \mathbb{K}$$

pour laquelle **les termes sont tous nuls à partir d'un certain rang** (c'est-à-dire d'un certain n).

Le plus grand entier n pour lequel $a_n \neq 0$ est le **degré** du polynôme. On note $\deg(P) = n$.
Autrement dit, $\forall k > n$, $a_k = 0$.

- X est appelée *indéterminée* du polynôme.
- Le nombre a_k est **le coefficient du terme de degré** k.
- Le terme $a_k X^k$ est un **monôme de degré** k. Un polynôme est donc une somme de monômes.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.
  Par exemple, l'ensemble des polynômes dont les coefficients a_k sont des complexes est noté $\mathbb{C}[X]$.

Exemple 3.2
$P(X) = 1 + 3X^2 + 5X^4$ est un polynôme de degré 4 à coefficients réels. Il appartient donc à l'ensemble $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$.
Son coefficient de degré 2 et égal à 3. sont coefficient de degré 3 est nul.
Le monôme de degré 4 est $5X^4$.

Polynôme nul :

Soit le polynôme $P(X) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k X^k$. $P(X)$ est le **polynôme nul** si et seulement si tous ses coefficients sont nuls :

$$P \text{ est le polynôme nul } \iff \forall k \quad a_k = 0$$

Par convention le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Égalité de deux polynômes :

Soient deux polynômes $A(X) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k X^k$ et $B(X) = \sum\limits_{k \geq 0} b_k X^k$.
Ces deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux :

$$A = B \quad \iff \quad \forall k \quad a_k = b_k$$

Deux polynômes égaux sont donc bien évidemment de même degré :

$$A = B \quad \implies \quad \deg A = \deg B$$

Exemple 3.3
Identifier les coefficients a, b, c, d, e vérifiant légalité suivante :

$$x^2 - 3x^3 + 2x - 1 + 4x^4 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

3 Opérations sur les polynômes

3.1 Multiplication d'un polynôme par un scalaire

Soit $A(X) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes.
Soit un nombre complexe non nul $\lambda \neq 0$.
La multiplication de A par λ est le polynôme $B = \lambda A$ défini par :

$$B(X) = \lambda A(X) = \sum_{k \geq 0} b_k X^k \quad \text{avec} \quad \forall k \quad b_k = \lambda \times a_k$$

Les deux polynômes sont donc de même degré :

$$\deg(\lambda A) = \deg A$$

Exemple 3.4
Soit $P(X) = 1 + 3X^2 + 5X^4$. Le polynôme $Q = 2P$ est défini par $Q(X) = 2 + 6X^2 + 10X^4$.

3.2 Addition de deux polynômes

Soient deux polynômes $A(X) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k X^k$ et $B(X) = \sum\limits_{k \geq 0} b_k X^k$.
Soit $S = A + B$ le polynôme obtenu en sommant ces deux polynômes.
S est défini par :

$$S(X) = \sum_{k \geq 0} s_k X^k \quad \text{avec } \forall k \quad s_k = a_k + b_k$$

On ne peut pas exprimer de manière générale le degré du polynôme somme en fonction des degrés des polynômes A et B car il se peut que des monômes venant de l'un et l'autre s'annulent. On peut juste dire le polynôme somme est de degré inférieur ou égal au degré du polynôme de plus haut degré intervenant dans la somme :

$$\deg S \leq \max(\deg A \,;\, \deg B)$$

Exemple 3.5
Soient les polynômes $A(X) = 2X + 3X^2$, $B(X) = 1 - X^3$, $C(X) = 2 + X^2 + X^3$ *:*

- $(A + B)(X) = 1 + 2X + 3X^2 - X^3$
- $(B + C)(X) = 3 + X^2$ *est de degré 2 bien que* B *et* C *soient tous deux de degré 3.*
- $(A + C)(X) = 2 + 2X + 4X^2 + X^3$

3.3 Multiplication de deux polynômes :

Soient deux polynômes $A(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ et $B(X) = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$.
Soit $R = A\,B$ le produit de ces deux polynômes.
R est défini par :

$$R(X) = \sum_{k\geq 0} r_k X^k \quad \text{avec } \forall k \quad r_k = \sum_{i+j=k} a_i \times b_j$$

Le degré du polynôme produit est la somme des degrés des polynômes intervenant dans la somme :

$$\deg(R) = \deg(A) + \deg(B)$$

Exemple 3.6
Soient les trois polynômes $P(X) = 2 + X + 3X^2$, $Q(X) = 1 + 5X + 4X^2 + 6X^3$ *et* $H(X) = -X + X^6$.
Déterminer PQ, PH *et* QH.

3.4 Division par puissances décroissantes

3.4.1 Exemple introductif

Faire la division par puissances décroissantes de $A(X) = -6X + 1 + 4X^3$ par $B(X) = X - 1 + X^2$.

3.4.2 Méthode générale

Soient deux polynômes $A(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ et $B(X) = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$.
Diviser A par B par puissance décroissantes, c'est trouver deux polynômes Q (*quotient*) et R (*reste*) tels que :

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X) \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B$$

$Q(X)$ est le quotient de la division, et $R(X)$ est le reste de cette division.
On démontre que R et Q ne peuvent être simultanément nuls.

Pour faire la division, on commence par ordonner les deux polynômes par puissances décroissantes puis on pose la division de A par B comme une division classique (faire appel à vos souvenirs de primaire !).

$$\begin{array}{r|l} A(B) & B(X) \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ \vdots & \\ R(X) & \end{array}$$

On dit que B **divise** A si **le reste est nul**.

Remarque 3.1
Cette division n'a d'intérêt que si $\deg(A) \geq \deg(B)$ *(sinon* Q *est le polynôme nul).*

Exemple 3.7
Faire la division par puissances décroissantes de $-x^5 - x^4 + x^2 + x$ *par* $x + x^2$.

3.5 Division selon les puissances croissantes

3.5.1 Exemple introductif

Faire la division par puissances croissantes de $A(X) = -6X + 1 + 4X^2$ par $B(X) = X - 1 + X^2$ à l'ordre 2.

3.5.2 Méthode générale

Soient deux polynômes $A(X) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k X^k$ et $B(X) = \sum\limits_{k \geq 0} b_k X^k$.
Diviser A par B par puissances croissantes à l'ordre n, c'est trouver deux polynômes Q et R tels que :

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$$

- $\deg Q < N$
- $R(X)$ peut être factorisé par X^{n+1} : $R(X) = X^{n+1}\tilde{R}(X)$

$Q(X)$ est le quotient de la division, et $R(X)$ est le reste de cette division à l'ordre n.

Pour faire cette division, on commence par ordonner les polynômes par puissances croissantes.
La technique pour réaliser cette division est la même que pour les divisions classiques. On s'arrête dès que le reste peut-être factorisé par X^{n+1}. Cette division ne s'arrête à priori jamais, et c'est l'utilisation que l'on fera du résultat qui impose l'ordre auquel on décide de s'arrêter.

$$\begin{array}{r|l} A(B) & B(X) \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ \vdots & \\ R(X) & \\ \uparrow & \\ \text{factorisable par } X^{n+1} & \end{array}$$

Exemple 3.8
Faire la division par puissances croissantes à l'ordre 3 de $1 + x$ par $x^2 + 1$.

4 Racines des polynômes et factorisation

4.1 Introduction à la factorisation

Factoriser un polynôme, c'est le mettre sous la forme d'un PRODUIT de facteurs de la forme "(X - *un nombre*)" ou "$(aX^2 + bX + c)$" avec $a, c, b \in \mathbb{R}$ si le discriminant de ce dernier polynôme est négatif (dans le cas de la factorisation dans $\mathbb{R}$).

Exemple 3.9

- $2x^3 - 4x - 10x + 12 = 2(x-1)(x+2)(x-3)$
- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = (x^2+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ *: c'est une forme factorisée dans $\mathbb{R}$ car x^2+1 a un discriminant négatif.*
  Par contre dans $\mathbb{C}$ la factorisation serait $(x+i)(x-i)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
- $x^2 - x + 1 = (x+1)(x-2) + 3$ *n'est PAS une forme factorisée, à cause du "+3".*
- $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = -(x-1)(x^2 - x - 2)$ *n'est PAS une forme factorisée car le polynôme $x^2 - x - 2$ a un discriminant positif et peut donc être lui même factorisé.*
  La forme factorisée est $-(x-1)(x+1)(x-2)$.

4.2 Rappels pour les polynômes du second degré

Vous connaissez déjà les définition des racines d'un polynôme du second degré et de sa factorisation.
Soit le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c \quad$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

- Les racines du polynômes sont les nombres qui annulent le polynôme : X_0 est une racine si $P(X_0) = 0$. La détermination de ces racines se fait en calculant le discriminant. Un polynôme du second degré possède deux racines simples ou une racine double dans $\mathbb{R}$.
- Factoriser le polynôme, c'est le mettre sous la forme d'un produit de termes de la forme "$(X - X_0)$". Dans le cas où P possède deux racines distinctes X_1 et X_2, cette factorisation est :

$$P(X) = a(X - X_1)(X - X_2)$$

Dans le cas où P possède une racine double (discriminant nul),cette factorisation est :

$$P(X) = a(X - X_0)^2$$

Exemple 3.10
Factoriser le polynôme $A(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

4.3 Racines d'un polynôme

4.3.1 Racine

Définition :

Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.
On dit que X_0 est une **racine** de P si :

$$P(X_0) = 0$$

Les racines peuvent être des nombres réels ou complexes.

Si X_0 est une racine de P, alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que :

$$P(X) = (X - X_0)Q(X)$$

Exemple 3.11
Montrer que 1 est une racine du polynôme $A(X) = X^3 + X^2 + X - 3$ et déterminer le polynôme $B(X)$ tel que $A(X) = (X - 1)B(X)$.

Propriétés :

1. Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine complexe.
2. Soit un polynôme à coefficients réels. Si ce polynôme admet une racine complexe, alors le conjugué de cette racine est également une racine.
   Ainsi pour un polynôme à coefficients réels il y a nécessairement un nombre pair de racines complexes.

4.3.2 Ordre de multiplicité d'une racine

4.3.3 Définition :

Soit un polynôme A de degré n et X_0 est une racine de A.
Le plus grand entier ν tel que $A(X)$ est divisible par $(X - X_0)^\nu$ est appelé **ordre de multiplicité** de la racine X_0 :

$$A(X) = (X - X_0)^\nu B(X) \quad \underline{\text{et}} \quad B(X_0) \neq 0$$

- Si $\nu = 1$ on dit que X_0 est une racine simple *(ou d'ordre 1)*;
- Si $\nu = 2$ alors X_0 est une racine double *(ou d'ordre 2)*;
- Si $\nu = 3$ alors X_0 est une racine triple *(ou d'ordre 3)*;
- etc...

La somme des ordres de toutes les racines est égale au degré du polynôme :

$$A(X) = \prod_{i=1}^{n} a_n (X - X_i)^{\nu_i} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \nu_i = n$$

Cela signifie qu'un polynôme de degré 4 par exemple a nécessairement 4 racines simples, ou 2 racines racines doubles, ou une racine simple et une racine triple.

Propriété :

X_0 est une racine d'ordre ν du polynôme A $\quad\Leftrightarrow\quad$ $A(X_0) = A'(X_0) = ...A^{(\nu-1)}(X_0) = 0$

On peut utiliser cette propriété pour déterminer l'ordre d'une racine.

Exemple 3.12
Déterminer les racines des polynômes suivants et leur multiplicité :

- $A(x) = x^3 - 3x + 2$
- $B(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

4.4 Factorisation d'un polynôme

4.4.1 Cas général de la factorisation dans $\mathbb{C}$

Soit un polynôme P de degré n, possédant des racines X_i de multiplicité ν_i, et dont le coefficient du terme de degré n est a_n.

Factoriser le polynôme P, c'est le mettre sous la forme :

$$P(X) = a_n \prod_i (X - X_i)^{\nu_i}$$

Exemple 3.13
Soit le polynôme $P(X) = 3X^3 - 6X^2 + 3X - 6$.

- *On trouve comme racines 2, i et $-i$.*
- *Le coefficient du terme de plus haut degré est 3.*

Donc la factorisation de ce polynôme est :

$$3X^3 - 6X^2 + 3X - 6 = 3(X - 2)(X + i)(X - i)$$

4.4.2 Cas de la factorisation dans $\mathbb{R}$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$

Exemple introductif :

Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $A(X) = 3X^3 - 3X^2 + 12X - 12$.

Définition :

Soit P un polynôme à coefficients réels.
Les racines complexes des polynômes à coefficients réels sont nécessairement complexes conjuguées, donc si on note X_0 et $\overline{X_0}$ ces racines, on peut mettre $P(X)$ sous la forme :

$$P(X) = Q(X)(X - X_0)(X - \overline{X_0})$$

Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$ on ne veut pas voir apparaitre les racines complexes, donc on laisse $(X - X_0)(X - \overline{X_0})$ sous la forme d'un polynôme du second degré irréductible dans $\mathbb{R}$:

$$P(X) = Q(X)(X^2 + |X_0|^2 - 2X\Re(X_0))$$

Exemple 3.14
Soit le polynôme $Q(X) = 2X^3 + 6X^2 + 8X + 4$.

- -1 *est une racine évidente.*
- *La division par puissance décroissante de $2X^3 + 6X^2 + 8X + 4$ par $X + 1$ donne $X^2 + 2X + 2$. Ce polynôme de degré 2 a deux racines complexes : $-1 + i$ et $-1 - i$*
- *Le coefficient du terme de plus haut degré est 1.*

Donc dans $\mathbb{C}$, la factorisation de ce polynôme est :

$$2X^3 + 6X^2 + 8X + 4 = (X + 1)(X + 1 - i)(X + 1 + i)$$

Et dans $\mathbb{R}$, la factorisation de ce polynôme est :

$$2X^3 + 6X^2 + 8X + 4 = (X + 1)(X^2 + 2X + 2)$$

5 Exercices du chapitre 3

Exercice 3.1
Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré N vérifiant l'équation suivante :

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

On note a_i le coefficient du monôme de degré i, si bien que l'on peut écrire $P(X) = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$.

1. Déterminer les degrés des polynômes $Q(X) = P(X^2)$ et $R(X) = P(X)(X^2 + 1)$.
2. Montrer que l'on a nécessairement $N = 2$.
3. Déterminer l'ensemble des polynômes solutions de l'équation.

Exercice 3.2
Soit le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 vérifiant $3P(X) = (X + 1)P'(X)$.

Déterminer les solutions de cette équation.

Exercice 3.3
Dans chacun des cas suivants, donner le quotient et le reste de la division par puissances décroissantes de $A(X)$ par $B(X)$ et préciser si B divise A.

1. $A(X) = X^4 + 12X^2 + 5X^3 - 7 + 19X$ et $B(X) = X^2 - 1 + 3X$.
2. $A(X) = X^4 - 9X^2 - 4X^3 + 27X + 38$ et $B(X) = X^2 - 7 - X$.
3. $A(X) = X^5 + 2 - 2X^2$ et $B(X) = X^2 + 1$.

Exercice 3.4
Effectuer les divisions par puissances décroissantes suivantes :

1. $4X^5 - 2X^4 + 5X^3 + 4X + 2$ par $X^2 + 1$.
2. $-2X^5 - 2X^4 - X^3 + 4X^2 + 4X + 3$ par $X^2 + X + 1$.
3. $-X^6 + 3X^2 - 4X + 1$ par $X^7 - 4X^5 + 1$.
4. $2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ par $X^2 - 3X + 1$

Exercice 3.5
Déterminer λ pour que $x^4 - 5x^2 + 4x - \lambda$ soit divisible par $2x + 1$.
Trouver le quotient.

Exercice 3.6
Soient les polynômes P et Q définis par :

$$P(x) = 4x^2 - 5x^3 - x^5 + 3x^4 - 2 \qquad\qquad Q(x) = x - 2 - x^2$$

1. Faire la division par puissances décroissantes de $P(x)$ par $Q(x)$.
2. Q divise-t-il P ?

Exercice 3.7
Soit $P(x) = 6x^3 - 2x^2 - mx - 2$. Déterminer m sachant que $P(x)$ est divisible par :

1. $x + 1$
2. $2x - 6$

Exercice 3.8
Soient $a, b \in \mathbb{C}$.
Trouver une condition sur a et b pour que le polynôme $P_1(X) = X^2 + 2$ divise le polynôme $P_2(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Astuce : Poser la forme générale du polynôme quotient.

Exercice 3.9
Effectuer les divisions par puissances croissantes suivantes :

1. $X^6 - 2X^4 + 1 + X^3$ par $X^3 + X^2 + 1$ à l'ordre 5.
2. $X^4 - 2X + 1 + X^3$ par $X^2 + X + 1$ à l'ordre 2, puis à l'ordre 3.
3. $3 + X - 2X^3$ par $3 + X$ à l'ordre 4.
4. $1 + X$ par $1 + X^4 - X^2$ à l'ordre 2.

Exercice 3.10
(Cet exercice est inspiré d'un TD de Dimensionnement et Opérations Unitaires de 2ème année).

Dans le système suivant, déterminer les valeurs de x_1 et y_1, qui représentent des fractions molaires (donc comprises entre 0 et 1) :

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\alpha x_1}{1 + (\alpha - 1)x_1} \\ x_0 + y_2\dfrac{V}{L} = x_1 + y_1\dfrac{V}{L} \end{cases}$$

Avec :

- $\alpha = 2,59$
- $V = 300\ mol/h$
- $L = 150\ mol/h$
- $x_0 = 0,961$
- $y_2 = 0,535$

Exercice 3.11
Factoriser les polynômes suivants :

1. $B(X) = \dfrac{1}{2}X^2 + X - 4$ dans $\mathbb{R}$.
2. $A(X) = 2X^3 + 3X^2 - 10X$ dans $\mathbb{R}$.
3. $P(X) = X^4 - 3X^2 - 4$ dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.
4. $Q(X) = X^3 - iX^2 + X - i$ dans $\mathbb{C}$.
5. $R(X) = X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}$.
6. $S(x) = x^4 - i$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3.12
Dans chacun des cas suivants, déterminer la multiplicité de la racine X_0 du polynôme P et donner la factorisation de P :

1. $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$ et $X_0 = 1$.
2. $P(X) = X^3 - iX^2 + X - i$ et $X_0 = i$.

Exercice 3.13
Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.

Exercice 3.14
Factoriser les polynômes suivants :

1. $X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 3X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $2X^3 - 2iX^2 + 2X - 2i$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. $X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
4. $X^3 + 4X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3.15
Montrer que pour tout $n \geq 2$, $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par $x(x+1)(2x+1)$.

Exercice 3.16
Montrer que $x^{n+1} - x^n - x + 1$ est divisible par $(x-1)^2$.

Exercice 3.17
Une entreprise fabrique une quantité p d'un produit, compris dans l'intervalle $[0; 20]$.
Le coût de production, exprimé en milliers d'Euros, est donné par :

$$c : p \mapsto c(p) = p^3 - 30p^2 + 300p$$

Chaque produit est vendu à un prix de 84000 euros.

1. Exprimer en fonction de p le chiffre d'affaire total $r(p)$ en milliers d'euros.
2. Exprimer en fonction de p le bénéfice $b(p) = r(p) - c(p)$.
3. Déterminer les racines du polynôme b.
4. Déterminer à quelle condition l'entreprise est rentable.

Exercice 3.18
(Inspiré d'un TD de Chimie du semestre 1).
L'acide oxalique est un diacide que l'on notera H_2A. Ses pKa valent $pKaA_1 = 1,20$ et $pKA_2 = 4,30$. On veut calculer le pH de différentes solutions de cet acide.

Concentrations :

- La concentration de la forme acide est notée $[H_2A]$.
- La concentration de la forme amphotère est notée $[HA^-]$.
- La concentration de la forme basique est notée $[A^{2-}]$.
- La concentration en ions H_3O^+ est notée h.
- La concentration en ions HO^- est notée ω.
- la concentration totale en diacide est notée c.

On rappelle les définitions des pKa :

- $Ka_1 = \dfrac{h[HA^-]}{[H_2A]}$ et $pKa_1 = -\log Ka_1$
- $Ka_2 = \dfrac{h[A^{2-}]}{[HA^-]}$ et $pKa_2 = -\log Ka_2$
- $Ke = h\omega$ et $pKe = -\log Ke = 7$

On rappelle que le pH de la solution est donné par $pH = -\log h$ où h est exprimé en mol/L.

On a une solution avec une concentration initiale d'acide oxalique de 0,0100 mol/L, ce qui laisse supposer une prédominance de la forme acide et un comportement de monoacide. Dans ces conditions :

- Un bilan de matière aboutit à la relation $c = [H_2A] + [HA^-]$
- Un bilan sur les charges aboutit à la relation $h = [HA^-]$

1. Montrer que l'on a alors $h^2 + Ka_1 h - Ka_1 c = 0$.
2. Résoudre cette équation afin de déterminer h. En déduire le pH.

Exercice corrigé 3.1
Montrer que $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ est divisible par $(x-1)^2$.

On calcule $n \times 1^{n+1} - (n+1) \times 1^n + 1 = n - (n+1) + 1 = 0$ donc $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ est divisible par $x - 1$.
La division donne :

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - x^{n-3}... - 1)$$

On chercher si ce quotient est lui même divisible par $x - 1$. On calcule :

$$n\times \underbrace{1^n - 1^{n-1} - 1^{n-2} - 1^{n-3}... - 1}_{n\text{termes}} = n - n \times 1 = 0$$

donc $nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - x^{n-3}... - 1$ est bien divisible par $x - 1$.

On a donc montré que $\underline{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \text{ est divisible par } (x-1)^2}$.

Exercice corrigé 3.2
Soit $P(X) = 6X^3 - 2X^2 - mX - 2$.
Déterminer m sachant que $P(X)$ est divisible par $X + 1$.

On pose la division :

$$
\begin{array}{cccc|cc}
X^3 & -2X^2 & -mX & -2 & X & +1 \\
\cline{5-6}
-(6X^3 & +6X^2) & & & 6X^2 & -8X-m+8 \\
\cline{1-4}
 & -8X^2- & -mX & -2 & & \\
 & -(-8X^2 & -8X) & & & \\
\cline{2-4}
 & & (-m+8)X & -2 & & \\
 & & -(-m+8)X & -m+8 & & \\
\cline{3-4}
 & & & m-10 & &
\end{array}
$$

$X+1$ divise $P(X)$ si le reste est nul, ce qui n'est possible que si $m-10=0 \Longrightarrow \boxed{m=10}$.

Exercice corrigé 3.3
On mélange en volumes égaux une solution d'acide chlorhydrique à 0,01 mol/L avec une solution d'acide acétique à 0,1 mol/L.
Alors la concentration en ions H_3O^+, notée c, obéit à l'équation suivante :

$$c^2+0,01c-1,8.10^{-6}=0$$

Calculer le pH de la solution.

On rappelle que $pH=-\log c$.

On calcule le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = 0,01^2+4\times 1,8.10^{-6}=1,072.10^{-4}=(0,01035)^2$$

Formellement, cette équation a deux racines :

$$c_1=\frac{-0,01-0,01035}{2}=-0,020 \quad \text{et} \quad c_2=\frac{-0,01+0,01035}{2}=3,54.10^{-4}$$

Mais comme c représente une concentration, elle est nécessairement positive, donc $c=3,54.10^{-4}$.

On calcule alors $pH=-\log(3,54.10^{-4}) \Longrightarrow \boxed{pH=3,45}$

Exercice corrigé 3.4
Factoriser dans $\mathbb{R}$:

1. $-X^2+2X-1$
2. X^2-1
3. X^4-1
4. $-X^8+2X^4-1$

1. On reconnaît une identité remarquable : $\boxed{-X^2+2X-1=-(X-1)^2}$
2. $\boxed{X^2-1=(X+1)(X-1)}$
3. On pose $Y=X^2$:

$$X^4-1=Y^2-1=(Y+1)(Y-1)=(X^2+1)(X^2-1) \Longrightarrow \boxed{X^4-1=Y^2-1=(X^2+1)(X+1)(X-1)}$$

4. On pose $Z=X^4$:

$$-X^8+2X^4-1=-Z^2+2Z-1=-(Z-1)^2=-(X^4-1)^2=-\left((X^2+1)(X+1)(X-1)\right)^2$$
$$\Longrightarrow \boxed{-X^8+2X^4-1=-(X^2+1)^2(X+1)^2(X-1)^2}$$

Exercice corrigé 3.5
Soit $P(x)=(x+1)^7-x^7-1$ et $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Montrer que $1+j=-j^2$
3. Montrer que j est une racine de P et déterminer sa multiplicité.
4. En déduire que $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ est également une racine et donner sa multiplicité.
5. Trouver deux racines réelles évidentes de P.
6. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

1. Le premier terme du développement de $(x+1)^7$ est x^7. Ce terme s'annule avec le suivant, donc <u>P est un polynôme de degré 6</u>.

2.
- $j^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$
- $1 + j = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}$

On a donc bien $\boxed{1 + j = -j^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}}$

3. $P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^7 - 1 = -j^{14} - j^7 - 1 = -e^{i\frac{28\pi}{3}} - e^{i\frac{14\pi}{3}} - 1 = -e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = 0$
donc j est bien une racine de P.

On utilise la méthode des dérivées pour trouver sa multiplicité :
- $P'(j) = 7(1+j)^6 - 7j^6 = 7j^{12} - 7j^6 = 7j^6(j^6 - 1) = 7e^{i\frac{12\pi}{3}}\left(e^{i\frac{12\pi}{3}} - 1\right) = 0$ car $e^{i\frac{12\pi}{3}} = 1$
- $P'(j) = 42(1+j)^5 - 42j^5 = -42j^{10} - 42j^5 = -42j^5(j^5 + 1) = -42e^{i\frac{10\pi}{3}}\left(e^{i\frac{10\pi}{3}} - 1\right) = -42e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1\right) \neq 0$
car $e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

La dérivée première est la première dérivée qui ne s'annule pas en j, donc j est une racine d'ordre 2.

4. P étant un polynôme à coefficients réels, si j est une racine double, alors $\overline{j}$ est également une racine double.
Donc $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine double de P.
5. 0 et -1 sont deux racines de P.
6. On a trouvé les 6 racines de P, donc on peut directement écrire sa factorisation :

$$\boxed{P(x) = 7x(x+1)\left(x - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2\left(x - e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^2}$$

Exercice corrigé 3.6

Trouver le reste et le quotient de la division du polynôme $7x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 5$ par successivement $x - 3$, $x + 2$, $2x - 3$ et $3x + 1$.

- $7x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 5 = (x-3)(7x^3 + 18x^2 + 52x + 157) + 466$
- $7x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 5 = (x+2)(7x^3 - 17x^2 + 32x - 63) + 121$
- $7x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 5 = (2x-3)(\frac{7}{2}x^3 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{37}{8}x + \frac{119}{16}) + \frac{277}{16}$
- $7x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 5 = (3x+1)(\frac{7}{3}x^3 - \frac{16}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{29}{81}) - \frac{434}{81}$

Exercice corrigé 3.7

Calculer le quotient et le reste de la division de $x^{28} + a^{28}$ par $x^4 - a^4$ où a est une constante quelconque.

$x^{24} - a^{24} = (x^4 - a^4)(x^{24} + a^4x^{20} + a^8x^{16} + a^{12}x^{12} + a^{16}x^8 + a^{20}x^4 + a^{24}) = \sum_{k=0}^{6} x^{4k}a^{24-4k}$

Chapitre 4

Fractions rationnelles

1 Fractions rationnelles

1.1 Définition

Une **fraction rationnelle** $F(X)$ s'écrit sous la forme $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ où N et D sont deux polynômes de degrés quelconques, D n'étant pas le polynôme nul.

- D est appelé **dénominateur** de la fraction rationnelle
- N est appelé **numérateur** de la fraction rationnelle

Une fraction rationnelle est donc finalement définie comme le quotient de deux polynômes.

Exemple 4.1

- $F(X) = \dfrac{X^2}{3X+1}$
- $F(X) = \dfrac{1}{(X-2)(X+3)}$
- $F(X) = \dfrac{X^3}{X^7+X^4-1}$

1.2 Opérations sur les fractions rationnelles

Soient deux fractions rationnelles $F_1(X) = \dfrac{N_1(X)}{D_1(X)}$ et $F_2(X) = \dfrac{N_2(X)}{D_2(X)}$.

1.2.1 Addition de deux fractions rationnelles

$$(F_1+F_2)(X) = F_1(X)+F_2(X) = \frac{N_1(X)}{D_1(X)} + \frac{N_2(X)}{D_2(X)} = \frac{N_1(X)D_2(X)+N_2(X)D_1(X)}{D_1(X)D_2(X)}$$

Il s'agit de mettre les deux fractions sous le même dénominateur.

Exemple 4.2

- $\dfrac{X}{X^2+1} - \dfrac{X-1}{X+3} = \dfrac{X(X+3)-(X-1)(X^2+1)}{(X^2+1)(X+3)} = \dfrac{-X^3+2X^2+2X+1}{X^3+3X^2+X+3}$
- $\dfrac{1}{X^2-1} + \dfrac{2X}{X+1} = \dfrac{1+2X(X-1)}{X^2+1} = \dfrac{2X^2-2X+1}{X^2+1}$

1.2.2 Multiplication de deux fractions rationnelles

$$(F_1 \times F_2)(X) = F_1(X) \times F_2(X) = \frac{N_1(X)}{D_1(X)} \times \frac{N_2(X)}{D_2(X)} = \frac{N_1(X) \times N_2(X)}{D_1(X) \times D_2(X)}$$

Exemple 4.3

$$\frac{X}{X^2+1} \times \frac{X-1}{X+3} = \frac{X^2-X}{X^3+3X^2+X+3}$$

1.2.3 Simplification d'une fraction et fraction irréductible

Si le numérateur et le dénominateur ont au moins une racine commune, alors la fraction rationnelle peut être simplifiée.
Dans ce cas, on peut trouver un polynôme $R(X)$ tel que $N(X) = \tilde{N}(X)R(X)$ et $D(X) = \tilde{D}(X)R(X)$.
On peut alors simplifier la fraction $F(X)$:

$$F(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = \frac{\tilde{N}(X)}{\tilde{D}(X)}$$

Si $\tilde{D}$ et $\tilde{N}$ n'ont aucune racine commune, alors on a simplifié F au maximum, et on dit que $\dfrac{\tilde{N}(X)}{\tilde{D}(X)}$ est une **fraction rationnelle irréductible**.

Exemple 4.4
Soit $F(x) = \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^3-3x^2-2x+3}$.

- *La factorisation de* x^3+2x^2-x-2 *donne* $(x-1)(x+1)(x+2)$
- *la factorisation de* $2x^3-3x^2-2x+3$ *donne* $(x+1)(x-1)(2x-1)$

On a donc $F(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$.

1.3 Partie entière d'une fraction rationnelle

Soit la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$.
On note $E(X)$ le quotient et $R(X)$ le reste de la division par puissances décroissantes de $N(X)$ par $D(X)$:

$$N(X) = D(X) \times E(X) + R(X)$$

La fraction rationnelle se réécrit :

$$F(X) = E(X) + \frac{R(X)}{D(X)}$$

- $E(X)$ est appelé **partie entière de** F
- $\dfrac{R(X)}{D(X)}$ est une fraction irréductible telle que $\deg R < \deg D$.

Remarque 4.1
- $\deg N < \deg D \quad \Rightarrow \quad E(X) = 0$
- $\deg N = \deg D \quad \Rightarrow \quad E(X) = \lim_{X \to \infty} F(X) = a \in \mathbb{C}$

Exemple 4.5
- *Soit la fraction rationnelle* $\dfrac{x^2+4}{x-3}$ *:*
  Le degré du numérateur étant supérieur à celui du dénominateur, la partie entière est non nulle.
  La division par puissances décroissantes de x^2+4 *par* $x-3$ *donne un quotient de* $x+3$ *et un reste de* 13.
  Donc $\dfrac{x^2+4}{x-3} = x+3+\dfrac{13}{x-3}$. *La partie entière est* $(x+3)$.

- $\dfrac{2x^2+4}{x^2+1}$:
  Le numérateur et le dénominateur étant de même degré, la partie entière est la limite de la fraction en l'infini : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+4}{x^2+1} = 2$.
  La partie entière est 2.
  On a $2x^2+4 = 2(x^2+1)+2$ *donc* $\dfrac{2x^2+4}{x^2+1} = 2 + \dfrac{2}{x^2+1}$

1.4 Pôles et racines d'une fraction rationnelle

1.4.1 Racines d'une fraction rationnelle

Comme pour un polynôme, on dit que X_0 est une **racine** de F si :

$$F(X_0) = 0$$

Les racines de F sont bien évidemment les mêmes que les racines de N.

1.4.2 Pôles d'une fraction rationnelle

Soit une fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ sous sa forme irréductible.

- Les racines du polynôme D (qui ne sont donc pas également des racines de N puisque la fraction est irréductible) sont appelées **pôles** de la fraction rationnelle.
  Donc Y_0 est un pôle de F si :
  $$D(Y_0) = 0 \quad \text{et} \quad N(Y_0) \neq 0$$
- Si Y_0 est une racine de D d'ordre α, on dit que Y_0 est un pôle d'ordre α.

Exemple 4.6

- $\dfrac{X}{(X+1)(X^2+1)}$:
  La factorisation du dénominateur donne $(X+1)(X^2+1) = (X+1)(X+i)(X-i)$.
  Dans $\mathbb{R}$: -1 *est un pôle simple.*
  Dans $\mathbb{C}$: -1, i *et* $-i$ *sont des pôles simples.*
- $\dfrac{X-2}{X(X^2-1)^2}$:
  La factorisation du dénominateur donne $X(X^2-1)^2 = X(X+1)^2(X-1)^2$.
  Dans $\mathbb{R}$ *et dans* $\mathbb{C}$: 0 *est un pôle simple,* 1 *et* -1 *sont des pôles doubles.*

2 Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

2.1 Pourquoi décomposer une fraction rationnelle ?

Décomposer une fraction rationnelle c'est l'écrire comme une somme d'autres fractions rationnelles, ce qui la rend plus simple à étudier et/ou à utiliser.

Par exemple, on ne sait pas à priori calculer une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{5x^2-12}{x^3-4x}$.

Mais si on la met sous la forme $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2x}{x^2-4}$ *(vérifier que c'est bien le cas !)* les primitives se calculent facilement :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln|x| + \ln|x^2-4| + cste$$

Les décompositions ne sont pas uniques. Par exemple pour la fraction rationnelle précédente on aurait pu écrire $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$.

La **décomposition en éléments simples** est une décomposition particulière, qui permet notamment de se ramener à une forme qui permet de calculer les primitives. Elle est également utile pour la transformation de Laplace *(voir Semestre 2)*.

2.2 Décomposition en éléments simples

Soit une fraction rationnelle irréductible $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$.

La DES se fait en quatre étapes :

1. Déterminer la partie entière
2. Factoriser le dénominateur
3. Poser la forme générale de la DES
4. Déterminer les coefficients

La DES n'est pas même dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ car la factorisation est différente.

2.2.1 Première étape : Déterminer la partie entière.

On note E la partie entière de F, si bien que $F(X)$ peut s'écrire :

$$F(X) = E(X) + \frac{R(X)}{D(X)}$$

où $\dfrac{R(X)}{D(X)}$ est une fraction rationnelle irréductible, $R(X)$ étant le reste de la division par puissances décroissantes de $N(X)$ par $D(X)$.

C'est finalement la fraction rationnelle $\dfrac{R(X)}{D(X)}$ qu'il faut décomposer en éléments simples.

Exemple 4.7
Soit $F_1(X) = \dfrac{X^5 + 2X^3 - 2X^2 + 2X}{X^4 - 1}$.
La division de $X^5+2X^3-2X^2+2X$ *par* X^4-1 *donne un quotient égal à* X *et un reste égal à* $2X^3-2X^2+3X$ *donc :*

$$F_1(X) = X + \frac{2X^3 - 2X^2 + 3X}{X^4 - 1}$$

2.2.2 Deuxième étape : Factoriser le dénominateur.

On note X_i les pôles de la fraction irréductible $\dfrac{R(X)}{D(X)}$, chacun de multiplicité α_i.

- **Sur $\mathbb{R}$:**
  Le dénominateur peut se mettre sous la forme :

$$D(X) = \lambda \prod_i (X - X_i)^{\alpha_i} \prod_j (X^2 + p_j X + q_j)^{\beta_j}$$

  Les polynômes $X^2 + p_j X + q_j$ sont des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$.

  On a alors :

$$F(X) = E(X) + \frac{R(X)}{\lambda \prod_i (X - X_i)^{\alpha_i} \prod_j (X^2 + p_j X + q_j)^{\beta_j}}$$

  Exemple 4.8
  Pour la fraction F_1 *précédente :* $X^4 - 1 = (X^2+1)(X^2-1) = (X^2+1)(X+1)(X-1)$. *Donc :*

$$F_1(X) = X + \frac{3X^3 - 2X^2 + 3X}{(X^2+1)(X+1)(X-1)}$$

- **Sur $\mathbb{C}$:**
  Dans $\mathbb{C}$ les polynômes du type $X^2 + p_j X + q_j$ précédents, qui sont irréductibles dans $\mathbb{R}$, ont deux racines dans $\mathbb{C}$.

  On note toujours X_i les racines réelles et α_i leur multiplicité, et on note Z_j les racines complexes de multiplicité β_j.

  Le dénominateur peut se mettre sous la forme :

$$D(X) = \lambda \prod_i (X - X_i)^{\alpha_i} \prod_j (X - Z_j)^{\beta_i}$$

  On a alors :

$$F(X) = E(X) + \frac{R(X)}{\lambda \prod_i (X - X_i)^{\alpha_i} \prod_j (X - Z_j)^{\beta_i}}$$

  Exemple 4.9
  Pour la fraction F_1 précédente : $X^4 - 1 = (X + i)(X - i)(X + 1)(X - 1)$. Donc :

$$F_1(X) = X + \frac{3X^3 - 2X^2 + 3X}{(X + i)(X - i)(X + 1)(X - 1)}$$

2.2.3 Troisième étape : Poser la forme générale de la décomposition en éléments simples

Les pôles et leurs multiplicité ayant été déterminés, on pose la forme générale de la DES.

- **Sur $\mathbb{R}$:**

$$\begin{aligned}
F(X) = \; & E(X) + \sum_i \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ik}}{(X - X_i)^k} + \sum_j \sum_{p=1}^{\beta_j} \frac{a_{jp}X + b_{jp}}{(X^2 + p_j X + q_j)^p} \\
= \; & E(X) + \frac{A_{11}}{X - X_1} + \frac{A_{12}}{(X - X_1)^2} + ... + \frac{A_{1\alpha_1}}{(X - X_1)^{\alpha_1}} \\
& + \frac{A_{21}}{X - X_2} + \frac{A_{22}}{(X - X_2)^2} + ... + \frac{A_{2\alpha_2}}{(X - X_2)^{\alpha_2}} \\
& + ... \\
& + \frac{a_{11}X + b_{11}}{X^2 + p_1 X + q_1} + \frac{a_{12}X + b_{12}}{(X^2 + p_1 X + q_1)^2} + ... + \frac{a_{1\beta_1}X + b_{1\beta_1}}{(X^2 + p_1 X + q_1)^{\beta_1}} \\
& + \frac{a_{21}X + b_{21}}{X^2 + p_2 X + q_2} + \frac{a_{22}X + b_{22}}{(X^2 + p_2 X + q_2)^2} + ... + \frac{a_{2\beta_2}X + b_{2\beta_2}}{(X^2 + p_1 X + q_1)^{\beta_2}} \\
& + ...
\end{aligned}$$

  où les A_{ik}, b_j et a_j sont des constantes réelles.

- **Sur $\mathbb{C}$:**

$$\begin{aligned}
F(X) = \quad & E(X) + \sum_i \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ik}}{(X-X_i)^k} + \sum_j \sum_{p=1}^{\beta_j} \frac{B_{jp}}{(X-Z_j)^p} \\
= \quad & E(X) + \frac{A_{11}}{X-X_1} + \frac{A_{12}}{(X-X_1)^2} + ... + \frac{A_{1\alpha_1}}{(X-X_1)^{\alpha_1}} \\
& + \frac{A_{21}}{X-X_2} + \frac{A_{22}}{(X-X_2)^2} + ... + \frac{A_{2\alpha_2}}{(X-X_2)^{\alpha_2}} \\
& + ... \\
& + \frac{B_{11}}{X-Z_1} + \frac{B_{12}}{(X-Z_1)^2} + ... + \frac{B_{1\beta_1}}{(X-Z_1)^{\beta_1}} \\
& + \frac{B_{21}}{X-Z_2} + \frac{B_{22}}{(X-Z_2)^2} + ... + \frac{B_{2\beta_2}}{(X-Z_2)^{\beta_2}} \\
& + ...
\end{aligned}$$

où les A_{ik} sont des constantes réelles et les B_{jp} sont des constantes complexes.

Remarque 4.2
Dans le cas de deux pôles complexes conjugués, les constantes B_j correspondantes sont également complexes conjuguées.

Autrement dit :

- A chaque terme du type $(X - X_0)$ de la factorisation on associe un terme de la forme $\dfrac{A}{X - X_0}$ où A est une constante qu'il faudra déterminer par la suite.
- A chaque terme du type $(X - X_0)^n$ de la factorisation on associe n termes : $\dfrac{A_1}{X-X_0} + \dfrac{A_2}{(X-X_0)^2} + \dfrac{A_3}{(X-X_0)^3} + .. + \dfrac{A_{n-1}}{(X-X_0)^{n-1}} + \dfrac{A_n}{(X-X_0)^n}$ où les A_i sont des constantes qu'il faudra déterminer par la suite.
- A chaque terme du type $(X^2 + pX + q)^n$ de la factorisation on associe n termes : $\dfrac{a_1X+b_1}{X^2+pX+q} + \dfrac{a_2X+b_2}{(X^2+pX+q)^2} + \dfrac{a_3X+b_3}{(X^2+pX+q)^3} + .. + \dfrac{a_{n-1}X+b_{n-1}}{(X^2+pX+q)^{n-1}} + \dfrac{a_nX+b_n}{(X^2+pX+q)^n}$ où les a_i et b_i sont des constantes qu'il faudra déterminer par la suite.
  En général, dans ce dernier cas, dans tous les exemples que l'on traitera on aura $n = 1$

Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{A_{ik}}{(X-X_i)^k}$ sont des **éléments simples de** 1^{ere} **espèce** d'ordre k.

Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{a_{jb}X + b_{jb}}{(X^2 + p_jX + q_j)^{\beta_j}}$ sont des **éléments simples de seconde espèce.**

Exemple 4.10

1. *Pour la fraction F_1 précédente :*
   - *Sur $\mathbb{R}$: $F_1(X) = X + \dfrac{A}{X+1} + \dfrac{B}{X-1} + \dfrac{aX+b}{X^2+1}$ avec A ; B ; a ; $b = cstes$*
   - *Sur $\mathbb{C}$: $F_1(X) = X + \dfrac{A}{X+1} + \dfrac{B}{X-1} + \dfrac{C}{X+i} + \dfrac{C^*}{X-i}$ avec A ; $B \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{C}$*
2. *$F_2(X) = \dfrac{3X+1}{(X+6)(X-2)^3(X+2)(X-4)}$:*
   La partie entière est nulle et le dénominateur est déjà factorisé :
   $F_2(X) = \dfrac{A}{X+6} + \dfrac{B_1}{X-2} + \dfrac{B_2}{(X-2)^2} + \dfrac{B_3}{(X-2)^3} + \dfrac{C}{X+2} + \dfrac{D}{X-4}$ *avec A ; B_1 ; B_2 ; B_3 ; C ; $D = cstes$*

3. $F_3(X) = \dfrac{1}{(X+1)(X^2+3)(X-1)}$:
La partie entière est nulle et le dénominateur est déjà factorisé :

$$F_3(X) = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X-1} + \frac{aX+b}{X^2+3} \quad \textit{avec } A\ ;\ B\ ;\ a\ ;\ b = \textit{cstes}$$

4. $F_4(X) = \dfrac{5X^3+8X^2-4X-1}{X(X-1)(X+1)^2}$:
La partie entière est nulle et le dénominateur est déjà factorisé :

$$F_4(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{C_1}{X+1} + \frac{C_2}{(X+1)^2} \quad \textit{avec } A\ ;\ B\ ;\ C_1\ ;\ C_2 = \textit{cstes}$$

5. $F_5(X) = \dfrac{1}{X^2+4} = \dfrac{A}{X+2i} + \dfrac{A^*}{X-2i}$ *où A est une constante complexe.*
6. $F_6(X) = \dfrac{1}{(X-2)(X^2+2X+2)} = \dfrac{A}{X-2} + \dfrac{B}{X+1-i} + \dfrac{B^*}{X+1+i}$ *avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{C}$.*

2.2.4 Quatrième étape : Détermination des constantes

Première méthode : Constantes de éléments de première espèce d'ordre 1 et des termes de plus haut degré des pôles multiples

Cette méthode peut être utilisée :

- Pour les pôles simples a : les éléments simples correspondant sont de la forme $\dfrac{A}{X-a}$.
- Pour les termes de plus haut degré des pôles multiples b de multiplicité β : les éléments simples correspondant sont de la forme $\dfrac{B_\beta}{(X-b)^\beta}$.

Exemple 4.11
Considérons $F_4(X) = \dfrac{5X^3+8X^2-4X-1}{X(X-1)(X+1)^2} = \dfrac{A}{X} + \dfrac{B}{X-1} + \dfrac{C_1}{X+1} + \dfrac{C_2}{(X+1)^2}$ *(voir exemple précédent).*
Cette méthode permet de déterminer A, B et C_2, mais pas C_1.

La méthode est la suivante :

- Écrire l'égalité entre la fraction rationnelle et sa décomposition.
- Pour chacun des termes du type $\dfrac{A}{X-a}$, multiplier à gauche et à droite par $(X-a)$ et poser $X = a$, de telle sorte que dans la décomposition tous les termes sont nuls sauf celui correspondant au coefficient cherché A.
  De même pour chacun des termes du type $\dfrac{B_\alpha}{(X-b)^\alpha}$, il faut multiplier à gauche et à droite par $(X-b)^\alpha$ et poser $X = b$, de sorte que dans la décomposition tous les termes sont nuls sauf celui correspondant au coefficient cherché B_α.

Exemple 4.12
1. $F_4(X) = \dfrac{5X^3+8X^2-4X-1}{X(X-1)(X+1)^2} = \dfrac{A}{X} + \dfrac{B}{X-1} + \dfrac{C_1}{X+1} + \dfrac{C_2}{(X+1)^2}$
   - *Détermination de A :*

$$\begin{aligned} & XF_4(X) = \frac{5X^3+8X^2-4X-1}{(X-1)(X+1)^2} = A + X\left(\frac{B}{X-1} + \frac{C_1}{X+1} + \frac{C_2}{(X+1)^2}\right) \\ \Longrightarrow\quad & XF_4(X)|_{X=0} = \frac{-1}{-1\times 1} = A \\ \Longrightarrow\quad & A = 1 \end{aligned}$$

   - *Détermination de B :*

$$\begin{aligned} & (X-1)F_4(X) = \frac{5X^3+8X^2-4X-1}{X(X+1)^2} = B + (X-1)\left(\frac{A}{X} + \frac{C_1}{X+1} + \frac{C_2}{(X+1)^2}\right) \\ \Longrightarrow\quad & (X-1)F_4(X)|_{X=1} = \frac{8}{4} = B \\ \Longrightarrow\quad & B = 2 \end{aligned}$$

- *Détermination de C_2 :*

$$(X+1)^2F_4(X) = \frac{5X^3+8X^2-4X-1}{X(X-1)} = C_2 + (X+1)^2\left(\frac{A}{X}+\frac{B}{(X-1)}+\frac{C_1}{X+1}\right)$$
$$\Longrightarrow \quad (X+1^2)F_4(X)\big|_{X=-1} = \frac{6}{2} = C_2$$
$$\Longrightarrow \quad C_2 = 3$$

- *A ce stade on ne sait pas encore comment déterminer C_1.*

Donc $F_4(X) = \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{C_1}{X+1} + \dfrac{3}{(X+1)^2}$.

2. $F_5(X) = \dfrac{1}{X^2+4}$:
   - *La partie entière est nulle.*
   - *La factorisation du dénominateur donne $X^2+4 = (X+2i)(X-2i)$:*

$$F_5(X) = \frac{1}{(X+2i)(X-2i)}$$

   - *On note que les deux pôles complexes sont conjugués l'un de l'autre.*
     Donc $F_5(X) = \dfrac{A}{X+2i} + \dfrac{A^*}{X-2i}$ *où A est une constante complexe.*
   - *On détermine A par exemple par la première méthode présentée dans la partie précédente :*

$$A = F_5(X)|_{X=-2i} = \left.\frac{1}{(X-2i)}\right|_{X=-2i} \Longrightarrow A = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4} \Longrightarrow A^* = -\frac{i}{4}$$

Donc la DES de $F_5(X)$ est :

$$F_5(X) = \frac{i}{4(X+2i)} - \frac{i}{4(X-2i)}$$

3. $F_6(X) = \dfrac{1}{(X-2)(X^2+2X+2)}$:
   - *La partie entière est nulle.*
   - *La factorisation du dénominateur donne $(X-2)(X^2+2X+2)) = (X-2)(X+1-i)(X+1+i)$.*
     Donc :

$$F_6(X) = \frac{1}{(X-2)(X+1-i)(X+1+i)}$$

   - *On note que les deux pôles complexes sont conjugués l'un de l'autre.*
     Donc $F_6(X) = \dfrac{A}{X-2} + \dfrac{B}{X+1-i} + \dfrac{B^*}{X+1+i}$ *avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{C}$.*
   - *On détermine les constantes :*

$$A = (X-2)F_6(X)|_{X=2} = \frac{1}{10}$$
$$B = (X+1-i)F_6(X)|_{X=-1+i} = \frac{3i-1}{20}$$
$$B^* = -\frac{3i+1}{20}$$

Donc $F_6(X) = \dfrac{1}{10(X-2)} + \dfrac{3i-1}{20(X+1-i)} - \dfrac{3i+1}{20(X+1+i)}$

4. *Déterminer la DES de F_1 sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.*

Deuxième méthode : Donner des valeurs particulières à X

S'il ne nous reste qu'un ou deux coefficients à déterminer, on peut choisir de donner des valeurs particulières à X.
Cette méthode permet notamment de déterminer les constantes des pôles de second espèce.

La méthode est la suivante :

- On écrit l'égalité entre la fraction rationnelle et sa décomposition en éléments simples.
- S'il ne reste qu'un coefficient, on donne une valeur particulière à Xet grâce à l'égalité entre la fraction rationnelle et sa DES, on peut déterminer ce coefficient.
- S'il reste deux coefficients, on donne deux valeurs particulières à X et grâce à l'égalité entre la fraction rationnelle et sa DES, on obtient un système de deux équations dont les deux inconnues sont les coefficients à déterminer.

Attention, **on ne peut pas donner comme valeur particulière un pôle de la fraction rationnelle !**

Exemple 4.13
Pour le coefficient C_1 de la fraction F_4 précédente, on peut par exemple poser $X = 2$ (0, 1 et -1 sont des valeurs interdites) :

$$\begin{aligned} & F_4(2) = \frac{5\times 2^3 + 8\times 2^2 - 4\times 2 - 1}{2(2-1)(2+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2-1} + \frac{C_1}{2+1} + \frac{3}{(2+1)^2} \\ \Longrightarrow\ & \frac{7}{2} = \frac{17}{6} + \frac{C_1}{3} \\ \Longrightarrow\ & \frac{C_1}{3} = \frac{2}{3} \\ \Longrightarrow\ & C_1 = 2 \end{aligned}$$

Donc $F_4(X) = \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{2}{X+1} + \dfrac{3}{(X+1)^2}$

Troisième méthode : Méthode générale pour les pôles multiples

Pour des pôles de multiplicité α, la première méthode ne permet à priori de déterminer que le coefficient A_α, mais pas ceux des termes d'ordres inférieurs. La méthode suivante permet de déterminer d'un seul coup tous les coefficients des pôles multiples.

Soit une fraction rationnelle irréductible $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ possédant un pôle a de multiplicité α.
Alors on peut l'écrire :

$$F(X) = \frac{N(X)}{(X-a)^\alpha d(X)} \quad \text{avec} \quad d(a) \neq 0$$

La décomposition en éléments simples permet par ailleurs d'écrire :

$$F(X) = R(X) + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{(X-a)^i}$$

où $R(X)$ est une fraction rationnelle égale à la somme de tous les autres termes de la DES.
En égalisant ces deux relations on a :

$$\begin{aligned} & \frac{N(X)}{(X-a)^\alpha d(X)} = R(X) + \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{(X-a)^i} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{N(X)}{d(X)} = R(X)(X-a)^\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha} A_i (X-a)^{\alpha-i} \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $h = X - a$ ($\Leftrightarrow X = a + h$) :

$$\frac{N(a+h)}{d(a+h)} = E(a+h)(h)^\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha} A_i h^{\alpha-i}$$

On reconnait la forme générale de la division par puissances croissantes à l'ordre $\alpha-1$ du polynôme $N(a+h)$ par le polynôme $d(a+h)$.

Le coefficient du terme de degré i de la décomposition en élément simple (A_i) est celui se trouvant devant $h^{\alpha-i}$.

Effectuer la division par puissances croissantes de $N(a+h)$ par $d(a+h)$ permet donc d'identifier ces coefficients.

Exemple 4.14
On cherche la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $G(X) = \dfrac{X^2-2X+1}{X(X-2)^3}$.

La forme générale de la DES est :

$$G(X) = \frac{A_1}{X-2} + \frac{A_2}{(X-2)^2} + \frac{A_3}{(X-2)^3} + \frac{B}{X}$$

Par la première méthode on détermine $B = -\dfrac{1}{8}$.

Pour les coefficients A_i :

- *On multiplie les deux expressions de G par $(X-2)^3$:*

$$G(X)(X-2)^3 = \frac{X^2-2X+1}{X} = A_1(X-2)^2 + A_2(X-2) + A_3 + \frac{B(X-2)^3}{X}$$

- *On fait le changement de variable $h = X-2 \Leftrightarrow X = h+2$:*

$$\frac{(h+2)^2-2(h+2)+1}{h+2} = A_1h^2 + A_2h + A_3 + \frac{Bh^2}{h+2} \Longrightarrow \frac{h^2+2h+1}{h+2} = A_1h + B_2h^2 + A_3 + \frac{Bh^3}{h+2}$$

- *On doit donc faire la division par puissances croissantes à l'ordre 2 de h^2+2h+1 par $h+2$.*
  On obtient $1+2h+h^2 = (2+h)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3h}{4} + \dfrac{h^2}{8}\right) - \dfrac{h^3}{8}$.
- *On identifie les coefficients :*

$$A_1 = \frac{1}{8} \quad ; \quad A_2 = \frac{3}{4} \quad ; \quad A_3 = \frac{1}{2}$$

On a donc finalement :

$$\boxed{G(X) = -\frac{1}{8X} + \frac{1}{8(X-2)} + \frac{3}{4(X-2)^2} + \frac{1}{2(X-2)^3}}$$

2.3 Lien entre les décompositions en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

On peut se servir de la DES sur $\mathbb{C}$ pour écrire la DES sur $\mathbb{R}$.

Les termes de première espèce correspondant à des pôles réels sont les mêmes.

Pour les termes correspondant à des pôles complexes, ils s'écrivent dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{aX+b}{X^2+pX+q} \qquad a\ ;\ b \in \mathbb{R}$$

Et dans $\mathbb{C}$:

$$\frac{A}{X-Z_1} + \frac{B}{X-Z_2} \qquad A\ ;\ B \in \mathbb{C}$$

Avec $X^2+pX+q = (X-Z_1)(X-Z_2)$.

Ces deux termes sont égaux, donc on a :

$$\frac{aX+b}{X^2+pX+q} = \frac{A}{X-Z_1} + \frac{B}{X-Z_2}$$

En réduisant le terme de droite au même dénominateur on obtient :

$$\frac{aX+b}{X^2+pX+q} = \frac{A(X-Z_2)+B(X-Z_1)}{(X-Z_1)(X-Z_2)} = \frac{(A+B)X-(AZ_1+BZ_2)}{X^2+pX+q}$$

En identifiant les numérateurs on a :

$$\begin{cases} a = A+B \\ b = -(AZ_1+BZ_2) \end{cases}$$

Ainsi on peut déterminer les coefficient des termes de seconde espèce (a et b) à partir des coefficients complexes de la DES sur $\mathbb{C}$.

Exemple 4.15
Soit $F(X) = \dfrac{X}{(X^2+4)(X+1)}$.

Dans $\mathbb{R}$, la DES s'écrit :

$$F(X) = \frac{A}{X+1} + \frac{aX+b}{X^2+4} \qquad A\ ;\ a\ ;\ b \in \mathbb{R}$$

Dans $\mathbb{C}$ la DES s'écrit :

$$F(X) = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X+2i} + \frac{B^*}{X-2i} \qquad A \in \mathbb{R} \qquad B \in \mathbb{C}$$

Dans les deux cas le coefficient A correspondant au pôle réel est bien le même.

Déterminons les coefficients de la DES sur $\mathbb{C}$:

$$A = (X+1)F(X)|_{X=-1} = -\frac{1}{5}$$
$$B = (X+2i)F(X)|_{X=-2i} = \frac{1+2i}{10}$$
$$B^* = \frac{1-2i}{10}$$

Donc $F(X) = -\dfrac{1}{5(X+1} + \dfrac{1+2i}{10(X+2i)} + \dfrac{1-2i}{10(X-2i)}$.

En réduisant $\dfrac{1+2i}{10(X+2i)} + \dfrac{1-2i}{10(X-2i)}$ *au même dénominateur on a :*

$$\frac{1+2i}{10(X+2i)} + \frac{1-2i}{10(X-2i)} = \frac{X+4}{5(X^2+4)}$$

On identifie donc $\dfrac{X+4}{5} = aX+b \Longrightarrow a = \dfrac{1}{5}$ *et* $b = \dfrac{4}{5}$.

La DES sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$F(X) = \frac{X+4}{5(X^2+4)} - \frac{1}{5(X+1)}$$

3 Primitives des fractions rationnelles réelles

Avant de chercher à intégrer une fraction rationnelle, il faut toujours commencer par écrire sa décomposition en éléments simples, et c'est sous cette forme qu'il faut intégrer.

3.1 Primitives des éléments de première espèce

Ce sont les éléments de la forme $\dfrac{A}{(X-a)^n}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Cette intégration ne pose pas de problème :

- Pour $n = 1$: $\displaystyle\int^X \frac{A}{(t-a)}\mathrm{d}t = A\ln|X-a| + cste$
- Pour $n > 1$: $\displaystyle\int^X \frac{A}{(t-a)^n}\mathrm{d}t = -\frac{1}{n-1}\frac{A}{(X-a)^{n-1}} + cste$

Exemple 4.16
On cherche la primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+2}{(x-1)^3}$

- *la DES donne* $f(x) = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{6}{(x-1)^2} + \dfrac{5}{(x-1)^3}$
- *On a alors :*

$$\int^X f(t)\,dt = 3\ln|X-1| - \frac{6}{X-1} - \frac{5}{2(X-1)^2} + cste = 3\ln|X-1| - \frac{12X-7}{2(X-1)^2} + cste$$

3.2 Intégration des éléments de seconde espèce de multiplicité 1

Ce sont les éléments de la forme $\dfrac{aX+b}{X^2+pX+q}$ où X^2+pX+q est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}$.

Pour le calcul de la primitive, on décompose cette fraction rationnelle de la façon suivante :

$$I = \int^X \frac{at+b}{t^2+pt+q}\mathrm{d}t = \int^X \frac{a}{2}\frac{2t+p}{t^2+pt+q}\mathrm{d}t + \int^X \frac{b-ap/2}{t^2+pt+q}\mathrm{d}t = \frac{a}{2}I_1 + \left(b - \frac{ap}{2}\right) I_2$$

Avec $I_1 = \displaystyle\int^X \frac{2t+p}{t^2+pt+q}\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int^X \frac{1}{t^2+pt+q}\mathrm{d}t$.

Il faut donc calculer ces deux primitives :

- $I_1 = \displaystyle\int^X \frac{2t+p}{t^2+pt+q}\mathrm{d}t = \ln|X^2+pX+q| + cste$
- Le calcul de I_2 est un peu plus complexe et nécessite un changement de variable .

  On a $t^2+pt+q = \left(t+\dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{4}$.

  Or le discriminant du dénominateur est nécessairement négatif puisque par hypothèse le dénominateur n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$:

$$p^2 - 4q < 0 \Longrightarrow q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$$

  On pose alors $\delta^2 = q - \left(\dfrac{p}{2}\right)^2 > 0$, et on a :

$$t^2+pt+q = \left(t+\frac{p}{2}\right)^2 + \delta^2 = \delta^2\left[\frac{1}{\delta^2}\left(t+\frac{p}{2}\right)^2 + 1\right]$$

On fait le changement de variable :

$$u = \frac{1}{\delta}\left(t + \frac{p}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} & t = \delta u - \frac{p}{2} \\ & \mathrm{d}t = \delta \mathrm{d}u \\ & t^2 + pt + q = \delta^2(u^2+1) \end{aligned}$$

De sorte que :

$$I_2 = \int^{\frac{1}{\delta}\left(X+\frac{p}{2}\right)} \frac{1}{\delta^2(u^2+1)}\delta \mathrm{d}u = \frac{1}{\delta}\int^{\frac{1}{\delta}\left(X+\frac{p}{2}\right)} \frac{1}{(u^2+1)}\mathrm{d}u = \frac{1}{\delta}\arctan\left(\frac{1}{\delta}\left(X+\frac{p}{2}\right)\right) + cste$$

Pour résumer :

$$\int \frac{at+b}{(t^2+pt+q)^n}\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\ln|X^2+pX+q| + \frac{b-\dfrac{ap}{2}}{\sqrt{q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2}}\arctan\left(\frac{X+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2}}\right) + cste$$

4 Exercices du chapitre 4

Exercice 4.1
Écrire les fractions rationnelles suivantes comme la somme de leur partie entière et d'une fraction rationnelle irréductible.

1. $F_1(x) = \dfrac{x^3+5x+5}{x+1}$
2. $F_2(x) = \dfrac{x^6+2x^5+2x^4+5x^3+10x^2+5x+1}{(x+1)^2}$

Exercice 4.2
Mettre chacune des fractions rationnelles suivantes sous forme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $\dfrac{X^3-X^2+X-1}{X^3-1}$.
2. $\dfrac{X^3-3X+2}{X^4-5X^2+4}$.

Exercice 4.3
Soient les fractions rationnelles suivantes :

- $F_1(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)(x^2-4)}$
- $F_2(x) = \dfrac{x^3-4x^2+4x+1}{x^2-4x+4}$
- $F_3(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
- $F_4(x) = \dfrac{x^3+5x+5}{x+1}$

Donner <u>sans chercher à déterminer les coefficients</u> la forme générale de leur décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4.4
Soit la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}$

1. Déterminer la(les) racine(s) de F sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont des pôles de F.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.5
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

1. $F_1(X) = \dfrac{2X^2-5X-11}{X^2-2X-3}$
2. $F_2(X) = \dfrac{X^3-X^2+X}{(1-X^2)(2X-1)}$
3. $F_3(X) = \dfrac{X+5}{X^2+4X+4}$
4. $F_4(X) = \dfrac{X^3-17X+12}{X^3-3X^2-9X+27}$
5. $F_5(X) = \dfrac{2X}{(X^2+3)(X-1)}$
6. $F_6(X) = \dfrac{2X^3-3X^2+6X-30}{X^3-3X^2+6X-18}$
7. $F_7(X) = \dfrac{X^2+5}{(X-1)^4}$
8. $F_8(X) = \dfrac{27}{(X+1)^3(X-2)}$
9. $F_9(X) = \dfrac{(X^2+1)^2}{(X-1)^6}$
10. $F_{10}(X) = \dfrac{X^2-4}{(X-1)^2(X+1)^3}$
11. $F_{11}(X) = \dfrac{X+1}{(X-1)^4(X-2)^2}$

Exercice 4.6
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$:

1. $G_1(X) = \dfrac{4X^2+2}{X(X^2+1)}$
2. $G_2(X) = \dfrac{4X^2-10X+20}{(X^2+4)(X-3)}$
3. $G_3(X) = -\dfrac{X^2+4X+6}{X^3+2X+2X^2}$

Exercice 4.7
Calculer les primitives des fractions rationnelles F_1 à F_7 de l'exercice 5.

Exercice corrigé 4.1
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

1. $F(X) = \dfrac{X}{X^2-4}$
2. $G(X) = \dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$
3. $H(X) = \dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$
4. $K(x) = \dfrac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x-1}$
5. $L(x) = \dfrac{4x^4-10x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}$

1.
   - La partie entière est nulle
   - Factorisation du dénominateur : $F(X) = \dfrac{X}{X^2-4} = \dfrac{X}{(X-2)(X+2)}$
   - Forme générale de la DES : $F(X) = \dfrac{A}{X-2} + \dfrac{B}{X+2} \quad A\ ;\ B = cstes \in \mathbb{R}$
   - $A = F(X)(X-2)|_{X=2} = \left.\dfrac{X}{X+2}\right|_{X=2} = \dfrac{2}{2+2} = \dfrac{1}{2}$
   - $B = F(X)(X+2)|_{X=-2} = \left.\dfrac{X}{X-2}\right|_{X=-2} = \dfrac{-2}{-2-2} = \dfrac{1}{2}$

   Donc $\boxed{F(X) = \dfrac{1}{2(X-2)} + \dfrac{1}{2(X+2)}}$
2. La partie entière est non nulle. La division par puissances décroissantes du numérateur par le dénominateur donne :

$$\boxed{G(X) = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}}$$

   C'est la directement la DES.
3.
   - La partie entière est non nulle. La division par puissances décroissantes du numérateur par le dénominateur donne $H(X) = 2X + 5 + \dfrac{7X-4}{X^2-2X+1}$.
   - Factorisation du dénominateur : $H(X) = 2X + 5 + \dfrac{7X-4}{(X-1)^2}$
   - Forme générale de la DES : $H(X) = 2X + 5 + \dfrac{A_1}{X-1} + \dfrac{A_2}{(X-1)^2} \quad A_1\ ;\ A_2 = cstes \in \mathbb{R}$
   - $A_2 = H(X)(X-1)^2\big|_{X=1} = (2X^3+X^2-X+1)\big|_{X=1} = 3$
   - Pour A_1 on peut prendre une valeur particulière, par exemple $X = 0$:

$$H(0) = \left.\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}\right|_{X=0} = \left.\left(2X+5+\frac{A_1}{X-1}+\frac{3}{(X-1)^2}\right)\right|_{X=0} \Longrightarrow 1 = 5 - A_1 + 3 \Longrightarrow A_1 = 7$$

   Donc $\boxed{H(X) = 2X + 5 + \dfrac{7}{X-1} + \dfrac{3}{(X-1)^2}}$
4.
   - La partie entière est nulle.
   - Factorisation du dénominateur : $K(x) = \dfrac{2x^2-3x+3}{(x-2)(x^2+1)}$
   - Forme générale de la DES : $K(x) = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{ax+b}{x^2+1} \quad A\ ;\ a\ ;\ b = cstes \in \mathbb{R}$
   - $A = K(x)(x-2)^2\big|_{x=2} = \left.\dfrac{2x^2-3x+3}{x^2+1}\right|_{X=2} = 1$
   - Pour a et b on peut prendre deux valeurs particulières, par exemple $x = 0$ et $x = -1$:

$$\begin{cases} K(0) = \dfrac{3}{-2} = \dfrac{1}{-2} + \dfrac{b}{1} \\ K(-1) = \dfrac{8}{-6} = \dfrac{1}{-3} + \dfrac{-a+b}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = b + 2 = 1 \end{cases}$$

   Donc $\boxed{K(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{x-1}{x^2+1}}$

5.
- La partie entière est nulle.
- Forme générale de la DES :

$$L(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} \quad A_1 \ ; \ A_2 \ ; \ A_3 \ ; \ B_1 \ ; \ B_2 = cstes \in \mathbb{R}$$

- Pour les A_i :

$$L(x)x^3 = A_1x^2 + A_2x + A_3 + \left(\frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2}\right)x^3 = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x - 1}$$

La division de $(4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1)$ par $(x^2 - 2x - 1)$ par puissances croissantes à l'ordre 3 donne comme quotient $(1 - 2x + 3x^2)$. On identifie donc :

$$\begin{cases} A_1 = 3 \\ A_2 = -2 \\ A_3 = 1 \end{cases}$$

- $B_2 = L(x)(x-1)^2\big|_{x=1} = -1$
- Pour B_1 on prend une valeur particulière, par exemple $x = -1$:

$$L(-1) = -\frac{27}{4} = -3 - 2 - 1 + \frac{B_1}{-2} - \frac{1}{4} \Longrightarrow B_1 = 1$$

Donc $\boxed{L(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}}$

Exercice corrigé 4.2

Soit la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{x^3(x^2-1)}$.

1. Justifier sans calcul que la partie entière de $f(x)$ est nulle.
2. Déterminer la factorisation du dénominateur et en déduire le domaine de définition de f.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $f(x)$.
4. **Question BONUS :**
   Calculer $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Le numérateur est de degré 4 et le dénominateur est de degré 5. Le degré du dénominateur étant supérieur à celui du numérateur, la partie entière de $f(x)$ est nulle.
2. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \Longrightarrow \boxed{x^3(x^2-1) = x^3(x-1)(x+1)}$.

   On en déduit $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0 \ ; \ 1 \ ; \ -1\}}$.
3. On a $f(x) = \dfrac{2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{x^3(x-1)(x+1)}$.
   - Forme générale de la décomposition en éléments simples :

   $$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} \quad A \ ; \ B \ ; \ C_1 \ ; \ C_2 \ ; \ C_3 = cstes$$

   - Détermination de A :

   $$f(x)(x-1)\big|_{x=1} = A = \frac{2+2+2-3-1}{1 \times 2} \Longrightarrow A = 1$$

   - Détermination de B :

   $$f(x)(x+1)\big|_{x=-1} = B = \frac{2-2+2+3-1}{-1 \times (-2)} \Longrightarrow B = 2$$

   - Détermination des C_i :

   $$f(x) \times x^3 = \frac{2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{(x^2-1)} = \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right)x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

   On doit doit donc faire la division par puissances croissantes à l'ordre 2 de $2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ par $x^2 - 1$. Cette division donne un quotient de $1 + 3x - x^2$.
   On en déduit $C_1 = -1$; $C_2 = 3$; $C_3 = 1$.

   Finalement :

   $$\boxed{f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$