

Outils Mathématiques

BUT GCGP – SEMESTRE 3

Enseignant

Bastien Marguet

Année universitaire

2025–2026

Département

GCGP – IUT Lyon 1

Documents

Polycopié de cours + exercices

Contenu (aperçu)

- Fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles
- Intégrales multiples et outils de calcul
- Équations différentielles et résolution de problèmes
- Outils algébriques utiles en génie des procédés

Table des matières

1	Outils du calcul différentiel et intégral	3
1.1	Rappel sur les dérivées	3
1.1.1	Motivation	3
1.1.2	Règles fondamentales	3
1.1.3	Formules usuelles (à connaître)	3
1.1.4	Exemples concrets	3
1.2	Rappel sur les intégrales	4
1.2.1	Motivation	4
1.2.2	Principes essentiels	4
1.2.3	Exemples concrets	5
1.3	Changements de variables	5
1.3.1	Motivation	5
1.3.2	Procédure	5
1.3.3	Exemples	6
1.4	Exercices d'application	6
1.4.1	Dérivées	6
1.4.2	Intégrales	7
1.4.3	Changements de variables	7
2	Développements limités (DL)	9
2.1	Motivation et problème	9
2.2	Principe (formule générale)	9
2.3	DL d'ordre 1 (linéarisation)	9
2.4	DL d'ordre 2 (avec courbure)	10
2.5	Formules usuelles (autour de 0)	10
2.6	Procédure de construction (pas-à-pas)	10
2.7	Interprétation géométrique	10
2.8	Applications numériques (ordre de grandeur)	10
2.9	Exercices d'application sur les développements limités	11
3	Introduction aux matrices	13
3.1	Définition	13
3.2	Opérations sur les matrices	13
3.2.1	Addition et soustraction	13
3.2.2	Multiplication par un scalaire	13
3.2.3	Multiplication matricielle	13
3.2.4	Propriétés importantes	14
3.3	Applications concrètes	14
3.3.1	Application 1 : Rotation en 2D	14
3.3.2	Application 2 : Mélange de flux (bilan matière)	14
3.4	Exercices	15

4	Fonctions de plusieurs variables	17
4.1	Définition	17
4.2	Dérivées partielles	17
4.3	Gradient	17
4.4	Hessienne et dérivées secondes	18
4.5	Extrema de fonctions de plusieurs variables	18
4.6	Intégrales doubles	19
4.7	Exercices	19
5	Méthode de Newton–Raphson	21
5.1	Motivation et problème à résoudre	21
5.2	Principe géométrique	21
5.3	Conditions de réussite	23
5.4	Exercices d’application	25

1. Outils du calcul différentiel et intégral

1.1. Rappel sur les dérivées

Repère historique

De Fermat (tangentes) à Newton et Leibniz (XVII^e), la dérivée formalise le **taux de variation instantané**. C'est l'outil central pour modéliser vitesses, transferts et réactions.

1.1.1 Motivation

Idée clé

En génie des procédés, la dérivée $f'(x)$ quantifie **combien et à quelle vitesse** une grandeur change (débit, concentration, température, énergie). C'est la **pende locale** de f : elle indique *la vitesse de variation instantanée*.

Image mentale

Zoom sur la courbe : au voisinage d'un point, la courbe ressemble à sa **tangente**. La pente de cette droite \Rightarrow la dérivée.

1.1.2 Règles fondamentales

- | | |
|-------------------------|--|
| 1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ | 4. $(fg)' = f'g + fg'$ |
| 2. $(f + g)' = f' + g'$ | 5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ |
| 3. $(cf)' = cf'$ | 6. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$ |

1.1.3 Formules usuelles (à connaître)

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| 1. $(e^x)' = e^x$ | 3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | 5. $(\cos x)' = -\sin x$ |
| 2. $(a^x)' = a^x \ln a$ | 4. $(\sin x)' = \cos x$ | 6. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |

1.1.4 Exemples concrets

Débit instantané. Volume écoulé $V(t) = 100 \ln(1+t)$ (L).

$$Q(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{100}{1+t} \text{ (L/min)}.$$

$Q(0) = 100$ (max), $Q(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Échauffement d'un solide (refroidissement linéarisé). Flux $q(t) = hA(T(t) - T_{\text{air}})$. Loi d'énergie (masse m , chaleur massique c_p) :

$$mc_p \frac{dT}{dt} = -hA(T - T_{\text{air}}).$$

La dérivée $\frac{dT}{dt}$ est la **vitesse** d'évolution de la température.

À retenir

La dérivée est un **outil de lecture locale** (pente, vitesse). Elle permet de **linéariser** des lois et de quantifier des **vitesse instantanées**.

1.2. Rappel sur les intégrales

Repère historique

De Newton et Leibniz (XVII^e) au théorème fondamental de l'analyse : l'intégrale relie **aire cumulée** et **primitive**.

1.2.1 Motivation

L'intégrale additionne des petites contributions \Rightarrow **quantité totale** : production, énergie, masse, chaleur.

Idée clé

$\int_a^b f(x) dx =$ **cumul** de f entre a et b (aire algébrique sous la courbe).

Image mentale

Totalisateur : imagine un compteur qui additionne *en continu* le débit qui passe. À la fin, il affiche le **total**.

1.2.2 Principes essentiels

- Primitive : $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
- Définie : $\int_a^b f(x) dx$ (aire/cumul).
- Théorème fondamental : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ si $F' = f$.

1.2.3 Exemples concrets

Production cumulée. Débit $Q(t) = 4t$ (L/min) pour $0 \leq t \leq 10$:

$$M = \int_0^{10} 4t \, dt = [2t^2]_0^{10} = 200 \text{ L.}$$

Énergie consommée. Puissance $P(t) = P_0(1 - e^{-t/\tau})$:

$$E = \int_0^T P(t) \, dt = P_0 [T - \tau(1 - e^{-T/\tau})].$$

Interprétation : **aire** sous $P(t)$, énergie en Joules.

À retenir

Intégrer, c'est **cumuler** : l'intégrale transforme un **débit** (ou une puissance) en **quantité totale**.

1.3. Changements de variables

Repère historique

La substitution (ou “changement de variable”) vient des méthodes de quadrature : on **simplifie** l'intégrale en adoptant une variable mieux adaptée.

1.3.1 Motivation

Beaucoup d'intégrales deviennent simples après un **bon choix** de variable. Idéal pour exponentielles, puissances composées, racines.

Idée clé

Si $u = g(x)$ et $du = g'(x) \, dx$, alors

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \int f(u) \, du.$$

On remplace la forme compliquée par une forme **directe**.

1.3.2 Procédure

1. Identifier $u = g(x)$ qui **simplifie** l'expression.
2. Calculer $du = g'(x) \, dx$ et **changer les bornes** si l'intégrale est définie.
3. Réécrire l'intégrale en u , intégrer, puis **revenir** à x (si besoin).

1.3.3 Exemples

Exemple 1.

$$I = \int_0^1 2x e^{x^2} dx, \quad u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, \quad u \in [0, 1].$$

$$I = \int_0^1 e^u du = [e^u]_0^1 = e - 1.$$

$$\boxed{I = e - 1}$$

Exemple 2 (énergie Arrhenius).

$$I = \int_{T_1}^{T_2} A e^{-E_a/(RT)} dT.$$

Substitution $u = \frac{E_a}{RT} \Rightarrow du = -\frac{E_a}{R} \frac{1}{T^2} dT$ (ou linéarisation autour d'un T_0 si on veut un DL).
But : **simplifier** la dépendance exponentielle.

À retenir

Changer de variable, c'est **adapter** la variable à la structure de l'intégrande pour **intégrer plus simplement**.

Synthèse finale

Synthèse visuelle

- **Dérivées** : pente locale, vitesses \Rightarrow lecture *instantanée* du changement.
- **Intégrales** : cumul, aires \Rightarrow *total* produit/consommé.
- **Substitution** : choisir une variable qui simplifie \Rightarrow intégrale plus directe.

À retenir

Ces outils sont **complémentaires** : dériver pour **comprendre localement**, intégrer pour **cumuler globalement**, et changer de variable pour **calculer efficacement**.

1.4. Exercices d'application

1.4.1 Dérivées

1. **Vitesse de réaction** On considère la concentration d'un réactif au cours du temps :

$$C(t) = 5e^{-0.2t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{mol/L}).$$

- (a) Calculer la vitesse instantanée de réaction $r(t)$.
- (b) Donner sa valeur à $t = 5$ minutes.
- (c) Interpréter physiquement le signe et l'évolution de $r(t)$.

2. **Débit dans une canalisation** Le volume écoulé dans une canalisation est donné par :

$$V(t) = 100 \ln(1 + t), \quad t \geq 0 \quad (\text{L}).$$

- (a) Déterminer le débit instantané $Q(t)$.
 - (b) Calculer $Q(9)$.
 - (c) Que devient $Q(t)$ quand t devient grand ?
3. **Variation de température** La température d'un fluide chauffé dans un échangeur est modélisée par :

$$T(t) = 20 + 80 \left(1 - e^{-0.05t}\right) \quad (^\circ\text{C}), \quad t \geq 0.$$

- (a) Calculer la dérivée $T'(t)$.
- (b) Donner la valeur de $T'(0)$ et interpréter physiquement ce résultat.
- (c) Que devient $T'(t)$ quand t devient grand ?

1.4.2 Intégrales

1. **Production cumulée** Un réacteur produit avec un débit variable :

$$Q(t) = 4t \quad (\text{L/min}), \quad 0 \leq t \leq 10.$$

- (a) Calculer la quantité totale produite entre $t = 0$ et $t = 10$.
 - (b) Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. **Chaleur fournie par une chaudière** La puissance thermique fournie par une chaudière est donnée par :

$$P(t) = 200 e^{-0.1t} \quad (\text{kW}), \quad t \geq 0.$$

- (a) Écrire Q , la quantité de chaleur totale fournie entre $t = 0$ et $t = 20$ min.
 - (b) Calculer sa valeur.
 - (c) Comment interpréter la décroissance exponentielle de la puissance ?
3. **Consommation d'un réacteur** Un réacteur consomme un réactif avec un débit variable :

$$Q(t) = 50e^{-0.2t} \quad (\text{mol/min}), \quad t \geq 0.$$

- (a) Donner l'intégrale qui exprime la quantité totale de réactif consommée entre $t = 0$ et $t = 15$ min.
- (b) Calculer cette intégrale.
- (c) Que représente la limite de $\int_0^{+\infty} Q(t) dt$?

1.4.3 Changements de variables

1. **Intégrale trigonométrique** (*Indication* : poser $u = \sin(t)$). Calculer :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos(t) dt.$$

2. **Intégrale rationnelle** Calculer l'intégrale suivante en utilisant un changement de variable approprié :

$$K = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

3. **Intégrale trigonométrique** Calculer l'intégrale suivante en utilisant un changement de variable approprié - indice $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$:

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} dx.$$

4. **Intégrale logarithmique** Calculer l'intégrale suivante en utilisant un changement de variable approprié :

$$L = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

5. **Intégrale avec racine carrée** Calculer l'intégrale suivante en utilisant un changement de variable approprié :

$$M = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

6. **Bilan matière complexe** Le débit d'alimentation d'un réacteur suit la loi :

$$Q(t) = \frac{20t}{(1+t^2)^2} \quad (\text{mol/min}), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

- (a) Donner n , la quantité de matière totale introduite dans le réacteur.
(b) Calculer n en utilisant le changement de variable $u = 1 + t^2$.

7. **Bilan matière simplifié** Le débit d'entrée d'un réacteur est donné par :

$$Q(t) = \frac{10}{1+t^2} \quad (\text{mol/min}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- (a) Écrire n , la quantité de matière entrée entre $t = 0$ et $t = 1$.
(b) Effectuer le calcul de n .

2. Développements limités (DL)

Repère historique

Les développements limités remontent à **Brook Taylor** (1715) et **Colin Maclaurin**. Ils ont été systématisés par l'analyse au XIX^e siècle. **Aujourd'hui**, ils sont un outil standard pour **approcher localement** des fonctions en calcul scientifique.

2.1. Motivation et problème

On veut **simplifier** une fonction f compliquée pour **calculer vite** (à la main ou en simulation) *au voisinage* d'un point a .

Exemples concrets.

- **Cinétique** : $C(t) = C_0 e^{-kt}$, au *tout début* (t petit), on remplace e^{-kt} par une approximation courte pour lire une décroissance quasi-linéaire.
- **Rayonnement** : $q = \varepsilon\sigma(T^4 - T_{\text{air}}^4)$, près d'une température d'opération T_0 , on **linéarise** T^4 autour de T_0 pour obtenir un bilan *affine* en T .

Idée clé

Un **développement limité** remplace f par un **polynôme** qui **colle** à f près de a : droite (ordre 1), parabole (ordre 2), etc. Plus l'ordre est élevé, plus l'approximation locale est fidèle.

Image mentale

Zoom local : imagine une loupe sur la courbe de f au point a . Dans la lentille, la courbe *ressemble* à une forme simple : d'abord une **droite** (tangente), puis une **parabole** si l'on affine le modèle.

2.2. Principe (formule générale)

Si f est n -fois dérivable en a , alors au voisinage de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)$$

Remarque : on peut écrire un terme d'erreur (reste). Ici, on retient l'idée "approximation locale par polynôme".

2.3. DL d'ordre 1 (linéarisation)

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

Usage : modèle **rapide** et **très simple**, valable *tout près* de a .

Exemples rapides.

- **DL1 de e^{-kt} en $t = 0$:** $e^{-kt} \approx 1 - kt \Rightarrow$ pour t petit, $C(t) \approx C_0(1 - kt)$ (décroissance quasi-linéaire).
- **Linéarisation de T^4 en T_0 :** $T^4 \approx T_0^4 + 4T_0^3(T - T_0)$
Bilan rayonnement : $q = \varepsilon\sigma(T^4 - T_{\text{air}}^4) \approx \varepsilon\sigma[4T_0^3(T - T_0) + (T_0^4 - T_{\text{air}}^4)]$.

2.4. DL d'ordre 2 (avec courbure)

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

Usage : on capte la **courbure** locale, zone de validité plus large qu'avec DL1.

Exemples rapides.

- **$\cos x$ en 0 :** $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ (oscillations faibles, mécanique/structures).
- **e^{-kt} en 0 :** $e^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{(kt)^2}{2}$ (décrit le **ralentissement** de la décroissance).

2.5. Formules usuelles (autour de 0)

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 2. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ 3. $\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x + x^2$ 4. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ 6. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ 7. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ 8. $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ |
|---|---|

Validité : pour $|x| \ll 1$; sinon, l'erreur augmente vite.

2.6. Procédure de construction (pas-à-pas)

1. Choisir le point a (point d'opération, valeur autour de laquelle on **travaille réellement**).
2. Calculer $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$.
3. Insérer dans l'équation (1) (ordre 1, 2, ou n) et **simplifier**.
4. Vérifier qualitativement la **zone de validité** (variation de x faible autour de a).

2.7. Interprétation géométrique

- **DL1 :** remplace la courbe par **sa tangente** au point a (pente locale).
- **DL2 :** ajoute la **courbure** (parabole qui "écope" mieux la forme).

2.8. Applications numériques (ordre de grandeur)

- $\ln(1.05) \approx 0.05 - \frac{0.05^2}{2} = 0.04875$ (exact ≈ 0.04879 ; erreur $< 0.1\%$).
- $\cos(0.2) \approx 1 - \frac{0.2^2}{2} = 0.98$ (exact ≈ 0.98007 ; erreur $\approx 0.007\%$).

Synthèse visuelle

- **But** : simplifier une fonction près d'un point a pour calculer vite.
- **Outils** : DL1 (linéarisation), DL2 (ajout de courbure), formules usuelles.
- **Usage** : choix d'un **point d'opération** pertinent (a), zone de validité locale.

À retenir

Un développement limité est une **approximation locale par polynôme** : il rend **calculable** ce qui est **compliqué** à proximité d'un point d'intérêt. C'est l'outil naturel pour **linéariser** des modèles et construire des **simulateurs rapides**.

2.9. Exercices d'application sur les développements limités

Exercice 1 – Rendement énergétique et approximation logarithmique

Le rendement global d'un échangeur thermique peut s'écrire :

$$\eta = \frac{\ln(1 + \Delta T/T)}{\Delta T/T}.$$

1. Développer $\ln(1 + x)$ au premier ordre pour $x = \Delta T/T$.
2. Montrer que, pour des faibles différences de température $\Delta T \ll T$, le rendement $\eta \approx 1$.
3. Vérifier numériquement pour $\Delta T = 5$ K et $T = 300$ K.

Exercice 2 – Cinétique d'une réaction d'ordre 1

On considère une réaction d'ordre 1 :

$$C(t) = C_0 e^{-kt}, \quad k = 0.1 \text{ min}^{-1}.$$

1. Donner le développement limité de e^{-kt} à l'ordre 2 autour de $t = 0$.
2. En déduire une approximation polynomiale de $C(t)$ valable pour les petits temps.
3. Calculer $C(t)$ approximativement pour $t = 1$ min, puis comparer avec la valeur exacte.

Exercice 3 – Petits angles et forces de projection

Une pompe dévie légèrement un jet de fluide selon un angle θ . La composante horizontale de la vitesse est :

$$v_x = v \cos(\theta).$$

1. Approcher $\cos(\theta)$ par un DL d'ordre 2 en 0.
2. Donner une approximation simple de v_x pour des angles petits ($\theta \leq 10^\circ$).
3. Vérifier numériquement pour $v = 2$ m/s et $\theta = 0.15$ rad.

Exercice 4 – Temps de demi-vie et approximation exponentielle

La concentration d'un polluant dans une cuve décroît selon :

$$C(t) = C_0 e^{-kt}, \quad k = 0.02 \text{ min}^{-1}.$$

1. Donner le développement limité d'ordre 2 de e^{-kt} autour de $t = 0$.
2. En déduire une approximation simple de $C(t)$ valable pour les petites durées.
3. Vérifier numériquement la valeur de $C(t)$ à $t = 2$ min avec l'approximation et avec la formule exacte.

Exercice 5 – Différence finie et approximation par DL

On considère la vitesse d'une réaction chimique donnée par :

$$v(C) = k \ln(1 + C).$$

1. Approcher $v(C)$ par un développement limité au premier ordre pour $C \ll 1$.
2. Comparer la valeur approchée et la valeur exacte pour $C = 0.05$.
3. Interpréter l'approximation comme une simplification pratique pour un calcul de vitesse initiale.

Exercice 6 – Fonction trigonométrique en thermique

La loi d'oscillation thermique d'une surface peut s'écrire :

$$T(t) = T_0 + A \sin(\omega t),$$

avec $A \ll T_0$.

1. Donner le développement limité de $\sin(\omega t)$ jusqu'à l'ordre 3 en $t = 0$.
2. Écrire l'approximation de $T(t)$ pour les petits temps.
3. Vérifier numériquement la valeur exacte et l'approximation pour $\omega = 0.5$ rad/s, $t = 0.2$ s, $A = 5$.

Exercice 7 : Limites via développements limités

Consigne : Calculer les limites suivantes en utilisant des DL au voisinage de 0 (ou de la valeur indiquée). Préciser l'ordre minimal du DL nécessaire.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x) + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x}$$

3. Introduction aux matrices

3.1. Définition

Idée clé

Une **matrice** est un tableau de nombres qui agit comme un **opérateur linéaire** : elle transforme un vecteur en un autre vecteur.

Image mentale

Un vecteur est une **flèche**. La matrice agit dessus : elle change sa taille, son orientation ou sa position dans l'espace.

Une matrice est notée $A = (a_{ij})$ avec $i =$ ligne, $j =$ colonne. Exemple : $a_{1,2} = -1$ et $a_{2,2} = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Calculons l'effet de } A \text{ sur le vecteur } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Interprétation

Le vecteur initial $x = (1, 1)$ est transformé en $(1, 7)$. La matrice A agit comme une machine : elle **déforme et réoriente** le vecteur.

3.2. Opérations sur les matrices

3.2.1 Addition et soustraction

On additionne ou on soustrait terme à terme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Multiplication par un scalaire

On multiplie chaque élément :

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Multiplication matricielle

Définition : $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

À retenir

La multiplication matricielle représente l'application successive de deux transformations.

3.2.4 Propriétés importantes

— **Trace** : somme des éléments diagonaux → somme des **étirements sur les axes de base**.

Ex : $\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = 2 + 3 = 5.$

— **Déterminant** : facteur d'aire (ou volume). Si $\det(A) = 0$, chaque point est renvoyé sur une ligne : la transformation écrase l'espace.

Ex : $\det \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$ Et $\det \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0.$

— **Inverse** : A^{-1} est la transformation qui "annule" l'effet de A .

Ex : $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$ Et le produit $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

3.3. Applications concrètes

3.3.1 Application 1 : Rotation en 2D

Exemple avec $\theta = 90^\circ$:

La matrice de rotation d'angle θ est :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \qquad R(90^\circ) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Visualisation

Un carré unité tourné de 90° garde sa forme mais change d'orientation.

3.3.2 Application 2 : Mélange de flux (bilan matière)

On note les concentrations des entrées dans un vecteur $C_{\text{entrée}}$. Une matrice A (coefficients liés aux débits) permet de calculer les concentrations de sortie :

$$C_{\text{sortie}} = A \cdot C_{\text{entrée}}$$

Ex : deux flux alimentent deux cuves en parallèle, la première recevant 70% du flux 1 et 30% du flux 2, et la seconde recevant 20% du flux 1 et 80% du flux 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad C_{\text{entrée}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$C_{\text{sortie}} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \cdot 10 + 0.3 \cdot 20 \\ 0.2 \cdot 10 + 0.8 \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Exemple

Deux flux de concentrations 10 et 20 g/L alimentent deux sorties : la première cuve présente une concentration de 13 g/L et la seconde de 18 g/L.

À retenir

- Une matrice n'est pas qu'un tableau de nombres : c'est une **machine à transformer des vecteurs**.
- Les opérations sur matrices correspondent à des **actions concrètes** : additionner des données, changer d'échelle, effectuer une rotation, composer des transformations.
- Les matrices sont (omni)présentes en génie chimique : bilans, modélisation, optimisation.

3.4. Exercices**Exercice 1 – Étirement puis rotation**

On applique d'abord la matrice d'étirement $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ au vecteur $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, puis une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculez le vecteur final.
2. Représentez sur un plan : vecteur initial, après étirement, puis après rotation.

Exercice 2 – Cisaillement

Considérez la matrice de cisaillement $S_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Appliquez-la au carré unité de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

1. Donnez les nouvelles coordonnées des sommets.
2. Représentez la transformation : en quoi le carré s'est-il transformé ?

Exercice 3 – Deux sorties couplées

Deux flux de concentrations 8 et 12 g/L alimentent deux cuves :

- Cuve 1 reçoit 80% du flux 1 et 20% du flux 2.
- Cuve 2 reçoit 30% du flux 1 et 70% du flux 2.

1. Écrivez la matrice correspondante.
2. Calculez les concentrations finales.

Exercice 4 – Déterminant nul (écrasement)

Considérez

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Appliquez A aux vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

2. Que constatez-vous sur les images de ces vecteurs ?
3. Expliquez pourquoi on dit que la transformation "écrase l'espace".

Exercice 5 – Système de bilans matière-énergie

On modélise deux bilans couplés :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

1. Résolvez le système en utilisant la méthode de l'inverse matricielle.
2. Interprétez : F_1 et F_2 représentent deux flux compatibles avec les bilans.

Exercice 6 – Répartition de débits

Deux pompes alimentent deux réacteurs en parallèle.

- La pompe 1 envoie 70% de son débit vers le réacteur A et 30% vers le réacteur B.
- La pompe 2 envoie 40% de son débit vers le réacteur A et 60% vers le réacteur B.

1. Modélisez ce système par une matrice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telle que

$$\begin{bmatrix} Q_A \\ Q_B \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

2. Calculez les débits Q_A et Q_B lorsque $Q_1 = 100$ L/min et $Q_2 = 50$ L/min.

4. Fonctions de plusieurs variables

4.1. Définition

Imaginons que l'on veuille mesurer le **rendement d'un réacteur**. Ce rendement dépend à la fois de la **température** T et de la **concentration** C . Autrement dit, il n'est pas défini seulement en fonction d'une variable, mais de plusieurs à la fois.

C'est dans ce type de situation que l'on introduit ce qu'on appelle une **fonction à plusieurs variables**. Une fonction $f(x, y)$ associe une valeur (par exemple un rendement, une température, une énergie...) à chaque couple (x, y) .

Idée clé

Une fonction à plusieurs variables décrit un phénomène dépendant de plusieurs paramètres en même temps : **on relie une grandeur mesurée à plusieurs causes**.

Image mentale

Imagine une **surface 3D** : la hauteur $z = f(x, y)$ dépend de la position (x, y) . Chaque point du plan possède une altitude → comme une carte de relief ou une carte de température.

Exemples :

- $f(x, y) = x^2 + y^2$: la valeur z croît avec la distance à l'origine, formant un **paraboloïde**.
- $R(T, C) = kTC$: le rendement augmente si l'on augmente T ou C simultanément.

4.2. Dérivées partielles

La dérivée partielle est la dérivée d'une fonction selon une variable, en fixant les autres. Exemples :

$$\text{— } f(x, y) = x^2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f = x^2.$$

$$\text{— } \eta(T, C) = kTC \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial T} = kC : \text{ variation du rendement selon la température, à concentration fixée.}$$

Visualisation

Une dérivée partielle est la **pente dans une direction choisie**, les autres variables étant figées.

4.3. Gradient

Définition : Le gradient $\vec{\nabla} f(x, y) = \text{grad} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ est le vecteur qui indique la direction de **plus forte croissance de la fonction** et la valeur maximale de la pente locale.

Image mentale

Imagine un paysage montagneux : le gradient pointe vers la pente la plus raide qui monte.

Exemples :

- $f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \vec{\nabla} f = (2x, 2y)$.
Image mentale : les flèches partent du centre et s'éloignent comme un ballon qui gonfle.
- $T(x, y) = 100 - x^2 - y^2$. Le gradient $\vec{\nabla} T = (-2x, -2y)$ pointe vers la zone où la température augmente le plus rapidement.
Image mentale : la chaleur s'écoule dans la direction opposée aux flèches du gradient.

4.4. Hessienne et dérivées secondes

Définition : La Hessienne est la matrice des dérivées partielles secondes :

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f \\ \partial_{yx}f & \partial_{yy}f \end{bmatrix}.$$

Elle décrit la **courbure locale de la surface**.

Image mentale

Imagine que tu poses une **plaque souple** sur une surface : la Hessienne décrit comment la plaque se courbe localement (dans quelle(s) direction(s), et avec quelle intensité).

4.5. Extrema de fonctions de plusieurs variables

Point critique : un point où $\vec{\nabla} f(x, y) = \vec{0}$. **Nature du point critique :** déterminée par la Hessienne.

Visualisation

Visualise une surface en 3D :

- Si $\det(H) > 0$ et $\partial_{xx}f > 0$ (hessienne positive) \Rightarrow surface en cuvette (min local).
- Si $\det(H) > 0$ et $\partial_{xx}f < 0$ (hessienne négative) \Rightarrow surface en dôme (max local).
- Si $\det(H) < 0$ (hessienne mixte) \Rightarrow surface en selle (point col).

Exemples

- $f(x, y) = x^2 + y^2$; $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(H) = 4 > 0$, $\partial_{xx}f = 2 > 0 \Rightarrow$ minimum local (cuvette).
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$; $H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\det(H) = 4 > 0$, $\partial_{xx}f = -2 < 0 \Rightarrow$ max local (dôme).
- $f(x, y) = x^2 - y^2$; $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\det(H) = -4 < 0 \Rightarrow$ point selle (col de montagne).

4.6. Intégrales doubles

Définition : Une intégrale double permet de calculer une grandeur étendue (aire, masse, flux...) sur une région D du plan :

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Image mentale

Imagine un **relief** décrit par $z = f(x, y)$: l'intégrale double correspond au **volume** situé sous la surface au-dessus de la région D . Si $f(x, y)$ représente une densité de masse, le même calcul donne la **masse totale**.

4.7. Exercices

Exercice 1 – Rendement d'un réacteur

Le rendement est modélisé par :

$$R(T, C) = -(T - 300)^2 - (C - 0.5)^2 + 100$$

1. Déterminer le point critique.
2. Nature du point critique (minimum, maximum, selle) ?
3. Interprétation procédés : que représente ce point dans le fonctionnement du réacteur ?

Exercice 2 – Coût de production

Une entreprise fabrique un produit. Le coût (en k€) dépend du volume produit x et du prix des matières premières y :

$$C(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4xy.$$

1. Calculer le gradient de C . Quelle est son interprétation économique ?
2. Identifier la nature du point critique en $(0, 0)$.
3. Expliquer pourquoi cette situation correspond à une instabilité de coût.

Exercice 3 – Surface chauffée

On considère une plaque chauffée avec une répartition de température donnée par :

$$T(x, y) = 100 - x^2 - y^2.$$

1. Calculer le gradient en $(2, 3)$.
2. Interpréter physiquement : dans quelle direction la température augmente-t-elle le plus vite ?
3. Dans quel sens s'écoule la chaleur ?

Exercice 4 – Concentration sur une membrane

La concentration d'une molécule sur une membrane plane est modélisée par :

$$C(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. Écrire l'intégrale double donnant la quantité totale de molécule présente sur tout le plan.
2. Expliquer pourquoi un changement de variables en coordonnées polaires simplifie le calcul.
3. Interpréter : pourquoi la quantité totale reste finie malgré une membrane infinie ?

Exercice 5 – Gestion logistique

Le temps de livraison (en heures) d'un entrepôt vers deux villes dépend du nombre de camions x et du nombre de chauffeurs disponibles y :

$$T(x, y) = \frac{50}{x} + \frac{30}{y}.$$

1. Calculer les dérivées partielles en $(x, y) = (10, 15)$.
2. Interpréter : quel paramètre est le plus sensible à ce point (ajouter un camion ou un chauffeur) ?
3. Quelle stratégie logistique choisir ?

Exercice 6 – Répartition énergétique

Un échangeur thermique a une performance donnée par :

$$P(T, Q) = TQ - T^2 - Q^2,$$

où T est la température et Q le débit.

1. Déterminer le point critique.
2. Analyser la Hessienne et conclure sur la nature de ce point.
3. Donner l'interprétation physique : que signifie ce point pour le réglage de l'échangeur ?

Exercice 7 – Intégrales doubles variées

Calculer les intégrales doubles suivantes (on vous donne également leur sens : aire, volume ou grandeur physique) :

$$1. I_1 = \int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx$$

(Volume sous la surface $z = x + y$ au-dessus d'un rectangle $[0, 1] \times [0, 2]$).

$$2. I_2 = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + 2y) dy dx$$

(Volume au-dessus d'un domaine triangulaire).

$$3. I_3 = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \cos(x) \sin(y) dy dx$$

(Volume sous la surface $z = \cos(x) \sin(y)$ au-dessus d'un rectangle $[0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$).

$$4. I_4 = \int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)} dy dx$$

(Quantité totale d'une concentration décroissante sur un carré unité).

5. Méthode de Newton–Raphson

Repère historique

La méthode dite de Newton–Raphson est décrite par Newton vers 1669 et publiée en 1671, mais c’est Joseph Raphson qui en donne la première présentation claire en 1690. **Aujourd’hui, c’est l’une des méthodes d’approximation les plus utilisées en calcul scientifique.**

5.1. Motivation et problème à résoudre

On cherche à résoudre une équation $f(x) = 0$, c’est-à-dire à trouver une valeur de x qui annule la fonction. Dans de nombreux cas, il n’existe pas de formule explicite pour résoudre $f(x) = 0$.

Exemple : Équilibre convection + rayonnement. On cherche la température d’équilibre T d’un système où coexistent pertes convectives et radiatives :

$$f(T) = Q - hA(T - T_{\text{air}}) - \varepsilon\sigma A(T^4 - T_{\text{air}}^4) = 0.$$

Question : Essayez d’isoler T .

Idée clé

Le mélange *linéaire + quartique* empêche toute isolation simple de T : on résout numériquement.

5.2. Principe géométrique

Commençons par un exemple simple : résoudre $x^2 - 2 = 0$. On sait qu’une solution est $x = \sqrt{2}$ (l’autre étant $x = -\sqrt{2}$), mais supposons qu’on ne connaisse pas sa valeur numérique. On cherche donc à résoudre :

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

On part d’une approximation x_0 (par exemple $x_0 = 1$). On remarque que près de x_0 , la fonction $f(x)$ peut être approchée par son **développement limité d’ordre 1** :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Autrement dit, on remplace la courbe par sa **tangente en x_0** . L’intersection de cette tangente avec l’axe des abscisses fournit une nouvelle approximation x_1 .

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On recommence ensuite le processus pour obtenir x_2, x_3, \dots qui convergent vers $\sqrt{2}$. En répétant le raisonnement à partir de x_n , on obtient la relation de récurrence générale :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

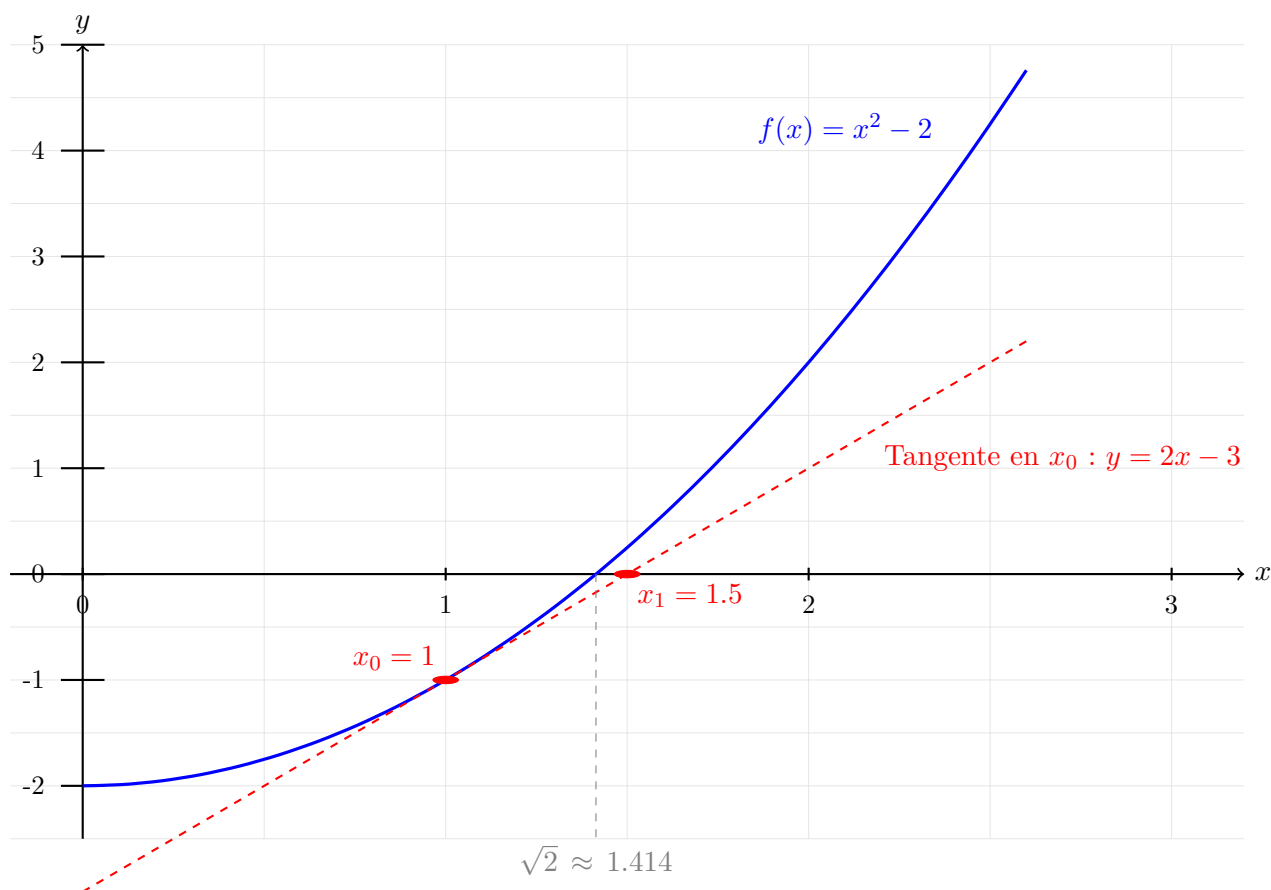
Idée clé

La méthode de Newton construit une suite (x_n) : chaque étape consiste à tracer la tangente en x_n et prendre son intersection avec l'axe des x comme x_{n+1} .

Image mentale

Imagine un **rayon laser** parti de la courbe en x_0 . Il suit la pente locale (la tangente) et vient frapper le sol : le point d'impact est x_1 . À chaque tir, le rayon se rapproche de la vraie cible : la racine.

Schéma illustratif



Itérations de Newton – détails de calcul

On pose $f(x) = x^2 - 2$ et $f'(x) = 2x$.

Étape 0 → 1 (à partir de $x_0 = 1$). $f(x_0) = 1^2 - 2 = -1$, $f'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2$.

Tangente en x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -1 + 2(x - 1) = 2x - 3.$$

Intersection avec l'axe des x ($y = 0$) :

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Étape 1 → 2 (à partir de $x_1 = \frac{3}{2}$) : $f(x_1) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$, $f'(x_1) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.
Tangente en x_1 :

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = \frac{1}{4} + 3\left(x - \frac{3}{2}\right) = 3x - \frac{17}{4}.$$

Intersection avec l'axe des x ($y = 0$) :

$$3x - \frac{17}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{17}{12} \approx 1.416\ 666\ 7.$$

Étape 2 → 3 (à partir de x_2) : $f(x_2) = \left(\frac{17}{12}\right)^2 - 2 = \frac{289}{144} - \frac{288}{144} = \frac{1}{144}$, $f'(x_2) = 2 \cdot \frac{17}{12} = \frac{17}{6}$.
Tangente en x_2 :

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) = \frac{1}{144} + \frac{17}{6}\left(x - \frac{17}{12}\right) = \frac{17}{6}x - \frac{577}{144},$$

Intersection avec l'axe des x ($y = 0$) :

$$\frac{17}{6}x - \frac{577}{144} = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{577}{408} \approx 1.414\ 215\ 686.$$

Vitesse de convergence (comparatif sur l'erreur). Avec $\sqrt{2} \approx 1.414\ 213\ 562$:

$$|x_1 - \sqrt{2}| \approx 8.58 \times 10^{-2}, \quad |x_2 - \sqrt{2}| \approx 2.45 \times 10^{-3}, \quad |x_3 - \sqrt{2}| \approx 2.12 \times 10^{-6}.$$

Observation

Le nombre de chiffres justes **double** à chaque itération : c'est la **convergence quadratique** de la méthode de Newton.

5.3. Conditions de réussite

Newton–Raphson marche bien si :

- la fonction est régulière près de la racine,
- la dérivée n'est pas nulle,
- et le point de départ x_0 est proche de la solution.

Idée clé

La méthode de Newton–Raphson peut converger très vite si les conditions sont favorables, mais sa réussite dépend fortement du point de départ choisi.

À retenir

La méthode de Newton–Raphson est une **méthode fondamentale en analyse numérique** : elle transforme un problème **non résoluble analytiquement** (insoluble à la main) en une suite de calculs simples. Sa rapidité de convergence en fait une technique omniprésente dans la pratique scientifique et industrielle.

5.4. Exercices d'application

Exercice 1 — Approcher $\sqrt{3}$ (à la main)

On résout $f(x) = x^2 - 3 = 0$ par Newton–Raphson.

1. Partir de $x_0 = 1$. Calculer y_1 , le DL1 de $f(x)$ autour de x_0 .
2. Calculer x_1 , la position d'intersection entre la droite d'équation y_1 et l'axe des abscisses.
3. Déterminer, **à la main** par la même méthode, x_2 (laisser en fractions).
4. Comparer numériquement (au centième) à $\sqrt{3}$.

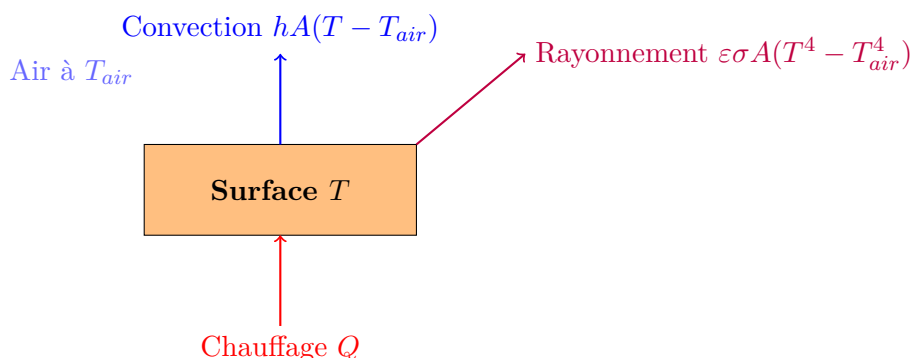
Exercice 2 — Approcher $\sqrt[3]{5}$ (à la main)

On résout $f(x) = x^3 - 5 = 0$ par Newton–Raphson.

1. Partir de $x_0 = 2$. Calculer y_1 , le DL1 de $f(x)$ autour de x_0 .
2. Calculer x_1 , la position d'intersection entre la droite d'équation y_1 et l'axe des abscisses.
3. Déterminer, **à la main** par la même méthode, x_2 (laisser en fractions).
4. Comparer numériquement (au centième) à $\sqrt[3]{5}$.

Exercice 3 — Équilibre thermique convection + rayonnement

On considère une surface chauffée recevant une puissance thermique Q , soumise à la fois à des pertes par **convection** et par **rayonnement**.



La température d'équilibre T est solution de l'équation :

$$f(T) = Q - hA(T - T_{air}) - \varepsilon\sigma A(T^4 - T_{air}^4) = 0.$$

— Données : $Q = 800$ W, $hA = 12$ W/K, $\varepsilon = 0,9$, $\sigma = 5,670 \times 10^{-8}$ W m⁻² K⁻⁴,
 $A = 0,5$ m², $T_{air} = 293$ K (20 °C).

— Dérivée pour Newton :

$$f'(T) = -hA - 4\varepsilon\sigma AT^3.$$

— Utiliser le code Python fourni (méthode de Newton–Raphson) pour trouver la température d'équilibre. Point de départ conseillé : $T_0 \in [330, 360]$ K (57–87 °C).

Travail demandé :

1. Exécuter le code et vérifier la convergence numérique vers la solution.

2. Comparer la part des pertes par **convection** et par **rayonnement** à l'équilibre (évaluer séparément les deux termes de perte).
3. Discuter l'influence du choix du point de départ T_0 sur la rapidité de convergence.

Fiche synthèse finale

Dérivées

- Taux de variation instantané = pente locale.
- Interprétation procédés : vitesse, débit, transfert, énergie.
- Règles clés :
 $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f/g)'$
- Exemples usuels : $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = 1/x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

Changements de variable

- Idée : simplifier une intégrale par substitution.
- Formule : si $u = g(x)$ et $du = g'(x)dx$, alors

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

- Exemple : $\int_0^1 2xe^{x^2} dx = \int_0^1 e^u du = e - 1$.

Développements limités (DL)

- Approximation locale par polynôme autour d'un point a .
- DL1 : $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ (linéarisation).
- DL2 : $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$.
- Formules usuelles (en 0) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Intégrales

- Quantité cumulée = aire sous la courbe.
- Interprétation procédés : production totale, énergie fournie.
- Théorème fondamental :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F' = f$$

- Exemple : $Q(t) = 4t \Rightarrow \int_0^{10} Q(t) dt = 200 \text{ L}$.

Méthode de Newton–Raphson

- Objectif : résoudre $f(x) = 0$ numériquement.
- Formule d'itération :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Idée : tangente en $x_n \rightarrow$ intersection avec l'axe x .
- Convergence rapide (quadratique) si f' non nul et x_0 bien choisi.

Vision d'ensemble

- **Dériver** : comprendre localement (vitesses, pentes).
- **Intégrer** : cumuler globalement (aires, quantités totales).
- **Changer de variable** : simplifier une intégrale.
- **Développer limité** : linéariser ou approximer une loi.
- **Newton–Raphson** : résoudre numériquement $f(x) = 0$.

Fiche compétences par chapitre

Dérivées — Compétences essentielles

- C.1** Lire/estimer une **pente locale** sur un graphe et l'interpréter physiquement (vitesse, débit, transfert).
- C.2** Dériver correctement des fonctions usuelles et des **composées** (chaîne, produit, quotient).
- C.3** Passer d'un **modèle physique** (ex. $mc_p dT/dt = -hA(T - T_{air})$) à sa **forme mathématique dérivée** .
- C.4** Linéariser localement une loi via la **tangente** (préparer un DL1).

Développements limités — Compétences essentielles

- C.1** Construire un **DL1/DL2** autour d'un point d'opération a (calcul de $f(a), f'(a), f''(a)$).
- C.2** **Linéariser** une loi physique (ex. T^4 autour de T_0) et estimer la **zone de validité** .
- C.3** Utiliser des DL usuels (exp, log, trig) pour **évaluer une limite** ou une approximation rapide.

Intégrales — Compétences essentielles

- C.1** Modéliser un **cumul** (aire/quantité/énergie) par une intégrale définie et poser les bornes pertinentes.
- C.2** Utiliser une **primitive** et le TFA pour calculer rapidement une intégrale simple.
- C.3** Interpréter une intégrale de **débit** ou **puissance** en grandeur totale (unités cohérentes).

Méthode de Newton–Raphson — Compétences essentielles

- C.1** Mettre une équation en forme $f(x) = 0$ et écrire l'itération $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- C.2** **Choisir** un bon point de départ, vérifier $f'(x_n) \neq 0$, détecter les échecs (divergence/oscillation).
- C.3** Interpréter la **convergence quadratique** et juger la précision atteinte (critères $|f(x)|, |\Delta x|$).

Changements de variable — Compétences essentielles

- C.1** Reconnaître une structure $\int f(g(x))g'(x)dx$ et choisir $u = g(x)$ **pertinent** .
- C.2** Transformer **correctement** les **bornes** dans une intégrale définie.
- C.3** Revenir à la variable d'origine si nécessaire et **contrôler les unités/signes** .

Matrices — Compétences essentielles

- C.1** Traduire un **système linéaire** en forme matricielle $Ax = b$.
- C.2** Calculer **produits matriciels** , interpréter $\det(A)$ (écrasement) et $\text{tr}(A)$.
- C.3** Résoudre un petit système (inverse, Cramer) et **interpréter** physiquement les inconnues.

Checklist d'autonomie (à cocher)

- Je sais passer d'un **énoncé procédés** à un **modèle mathématique** (dérivée/intégrale/DL).
- Je sais choisir et appliquer la **bonne technique** (substitution, DL, Newton) selon la structure du problème.
- Je contrôle **unités, bornes, signes** et j'interprète le résultat **physiquement**.